ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HỒ HUYỀN TRANG

LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ GIẢ THUYẾT ERDÖS - SZEKERES

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 36**

Giáo viên hướng dẫn:
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN, 2011

Mục lục

1 Khái niệm đồ thị **5**

1.1 Định nghĩa đồ thị 5

1.2 Đường đi và chu trình 6

1.3 Chu số và sắc số của đồ thị 9

1.3.1 Chu số của đồ thị 9

1.3.2 Sắc số của đồ thị 10

1.4 Chu trình Euler và chu trình Hamilton 17

1.4.1 Chu trình Euler 17

1.4.2 Chu trình Hamilton 20

2 Lý thuyết đồ thị, Định lý Ramsey và Giả thuyết Erd*ö*s - Szekeres **25**

2.1 Định lý Ramsey dưới ngôn ngữ đồ thị 25

2.2 Chứng minh định lí Ramsey nhờ ngôn ngữ đồ thị 28

2.3 Định lí Ramsey và chứng minh Giả thuyết Erd*ö*s - Szekeres 34

2.3.1 Lịch sử bài toán Erdös-Szekeres 34

2.3.2 Định lí Ramsey dưới ngôn ngữ tập hợp 37

2.3.3 Ứng dụng của Định lí Ramsey 39

2.3.4 Đánh giá cận trên và cận dưới của ES(n) 40

3 Mối quan hệ giữa lý thuyết đồ thị và giả thuyết Erd*ö*s - Szekeres **43**

3.1 Định lý Erdös -Szekeres mở rộng cho các điểm ở vị trí lồi . . 45

3.2 Giả thuyết "Big Line or Big Clique" 46

3.2.1 Tổng quát hóa của Định lý Erdös - Szekeres 50

3.2.2 Một số khẳng định. 55

Lời nói đầu

Năm 1935, Klein, Erdös và Szekeres đã đặt câu hỏi: Cho một số tự nhiên n bất kì, tồn tại hay không một số tự nhiên $ES(n)$ sao cho từ $ES(n)$ điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể trích ra n điểm là đỉnh của một đa giác lồi?
Để chứng minh sự tồn tại của số $ES(n)$, Szekeres (1935, xem [9]) đã phát hiện lại Định lí Ramsey (do nhà toán học trẻ người Anh Ramsey phát biểu và chứng minh năm 1930, xem [19]).
Trong [9], Erdös và Szekeres cũng đã đưa ra giả thuyết:
$ES(n) = 2^{n-2} + 1$.
Với sự cố gắng của hàng trăm nhà toán học, sau 75 năm, giả thuyết Erdös -Szekeres mới chỉ được chứng minh cho trường hợp $n = 3, 4, 5$ và gần đây (2006, xem [21]) cho trường hợp $n = 6$ nhờ máy tính.
Cả hai Định lí Ramsey và Định lí Erdös -Szekeres đều có chung một bản chất triết học: Khi số phần tử (số điểm) của một tập hợp đủ nhiều, có thể chọn được tập con *có cấu trúc* (đa giác lồi).
Định lí Ramsey có thể phát biểu trên ngôn ngữ đồ thị. Trường hợp đơn giản nhất của Định lí Ramsey là bài toán sau: Cho đồ thị đầy đủ với sáu đỉnh và các cạnh được tô bởi hai màu đỏ và xanh. Chứng minh rằng có ít nhất ba cạnh đồng màu (hoặc đỏ hoặc xanh). Bài toán này cũng có thể phát biểu dưới ngôn ngữ trò chơi như sau: Có sáu người ngồi quanh bàn tiệc, hãy chứng tỏ rằng có ít nhất hoặc ba người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau.
Do bản chất triết học sâu sắc, Định lí Ramsey đã trở thành hòn đá tảng của *Lí thuyết Ramsey* và có rất nhiều ứng dụng trong toán học và thực tế (lí thuyết số, hình học tổ hợp, lí thuyết đồ thị, lí thuyết mạng, toán trò chơi, trong công nghệ thông tin,...).
Một điều thú vị là, gần đây (2011), các tác giả của [10] đã sử dụng Định lí Erdös -Szekeres suy rộng để trả lời một câu hỏi mở của giả thuyết "big

line and big clique" trong lí thuyết đồ thị (xem [10]).
Như vậy, lí thuyết đồ thị, Định lí Ramsey và giả thuyết Erd$\ddot{o}$s -Szekeres có mối quan hệ khá chặt chẽ và thú vị.
Cơ bản dựa trên bài báo [10], luận văn Lí thuyết Đồ thị và Giả thuyết Erdös -Szekeres cố gắng phác thảo mối quan hệ thú vị giữa ba đối tượng toán học trên.
Luận văn gồm 3 chương:
Chương 1 : Trình bày các khái niệm cơ bản lí thuyết đồ thị. Các định nghĩa và định lí của Chương này sẽ được sử dụng trong hai chương sau.
Chương 2 : Trình bày giả thuyết Erd$\ddot{o}$s -Szekeres các chứng minh Định lí Ramsey.
Chương 3 :Dựa trên tài liệu [10], trình bày chứng minh Định lí Erd$\ddot{o}$s -Szekeres suy rộng và áp dụng để trả lời một câu hỏi mở của giả thuyết "big line or big clique" trong lí thuyết đồ thị.
Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS TS Tạ Duy Phượng. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn thầy hướng dẫn đã tận tình giúp đỡ, giảng giải trong suốt quá trình tác giả học tập và nghiên cứu đề tài.
Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học Khoa học thuôc Đại học Thái Nguyên và các thầy cô giáo Viện Toán học Việt Nam đã tận tâm giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.
Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình học tập. Song, do còn hạn chế về thời gian, cũng như trình độ hiểu biết nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của các thầy cô giáo và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 10 năm 2011.

Tác giả

Hồ Huyền Trang

Chương 1

Khái niệm đồ thị

Chương này trình bày những khái niệm cơ bản nhất của lí thuyết đồ thị dựa theo [1] và [2] nhằm sử dụng trong các chương 2 và 3.

1.1 Định nghĩa đồ thị

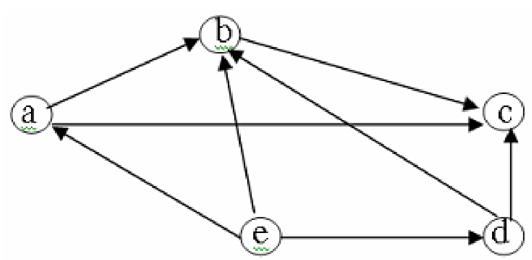
Chúng ta có thể coi bản đồ các tuyến đường giao thông của một thành phố, sơ đồ tổ chức một cơ quan, sơ đồ khối tính toán của một thuật toán, sơ đồ một mạng máy tính ... là những ví dụ cụ thể về đồ thị.

Định nghĩa 1.1.1. Đồ thị $G = (V, E)$ là một bộ gồm hai tập hợp V và E, trong đó:

1. $V \neq \emptyset$, các phần tử của V gọi là các *đỉnh* (vertices).

2. $E \subseteq V \times V$ là tập hợp các cặp không sắp thứ tự của các đỉnh được gọi là các *cạnh* (edges).

Ví dụ 1.1



Đồ thị G cho bởi hình vẽ trên với tập các đỉnh $V = \{a, b, c, d, e\}$ và tập các cạnh $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, d)\}$.
Nếu (a, b) là một cạnh của đồ thị thì ta nói rằng đỉnh b *kề* với đỉnh a và cả hai đỉnh a và b *kề* với cạnh (a, b).

Cặp đỉnh $(x, y) \in E$ không sắp thứ tự được gọi là *cạnh vô hướng,* còn nếu có sắp thứ tự được gọi là *cạnh có hướng.* Vì thế, ta thường phân các đồ thị thành hai lớp: Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng.

Định nghĩa 1.1.2. Đồ thị chỉ chứa các cạnh vô hướng được gọi là *đồ thị vô hướng,* còn nếu đồ thị chỉ chứa các cạnh có hướng được gọi là *đồ thị có hướng.*

Định nghĩa 1.1.3. Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đối xứng* nếu:

$$\forall x, y \in V : (x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$$

.

Nhận xét:*Các đồ thị vô hướng là đối xứng.*

Định nghĩa 1.1.4. Đồ thị $G = (V, E)$ mà mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bởi không quá một cạnh được gọi là *đơn đồ thị* (thường gọi tắt là đồ thị). Còn nếu những cặp đỉnh được nối với nhau nhiều hơn một cạnh thì được gọi là *đa đồ thị.*

1.2 Đường đi và chu trình

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 1.2.1. Đường đi trong đồ thị là một dãy các đỉnh: $\langle x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ...,$ sao cho mỗi đỉnh trong dãy (không kể đỉnh đầu tiên) kề với đỉnh trước nó bằng một cạnh nào đó, nghĩa là: $\forall\ i = 2, 3, ..., k-1, k : (x_{i-1}, x_i) \in E$.

Ta nói rằng đường đi này đi từ đỉnh đầu x_1 đến đỉnh cuối x_k. Số cạnh của đường đi được gọi là *độ dài* của đường đi đó.

Đường đi đơn là đường đi mà các đỉnh trên nó khác nhau từng đôi.

Định nghĩa 1.2.2. *Chu trình* là một đường đi khép kín (tức là đỉnh cuối của đường trùng với đỉnh đầu của đường đi). Ta thường kí hiệu chu trình là:

$$[x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k]$$

trong đó $x_1 = x_k$.
Để cho gọn, ta kí hiệu chu trình là

$$[x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1}] .$$

Khi nói đến một chu trình, nhiều khi ta cũng không cần xác định điểm đầu và điểm cuối của nó.

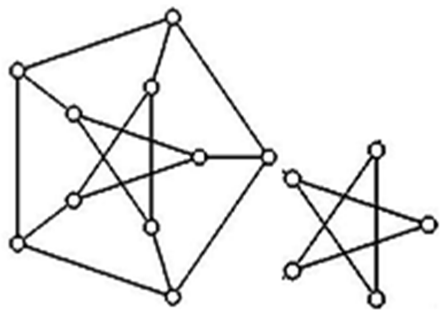
Chu trình được gọi là *chu trình đơn* nếu các đỉnh trên nó khác nhau từng đôi.
Trong một đồ thị, *đỉnh nút* là đỉnh kề với chính nó. *Đỉnh cô lập* là đỉnh mà không có các đỉnh khác kề với nó. Tập m - độc lập là một đồ thị của m - *đỉnh cô lập*.

Định nghĩa 1.2.3. i) Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là *đồ thị con* của đồ thị G nếu:

$$V' \subseteq V; E' = E \cap (V' \times V').$$

ii) Đồ thị $G" = (V, E")$ với $E" \subseteq E$ được gọi là *đồ thị riêng* của đồ thị G.

Ví dụ 1.2



Hình 1.2 Đồ thị thứ hai là đồ thị con của đồ thị đầu.

Định nghĩa 1.2.4. i) Hai đỉnh của đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu trên đồ thị này có một đường đi nối chúng với nhau.

ii) Đồ thị G đươc gọi là *liên thông* nếu mọi cặp đỉnh của đồ thị đều liên thông với nhau.

Quan hệ liên thông trên tập đỉnh là một quan hệ tương đương. Nó tạo lên một phân hoạch trên tập các đỉnh. Mỗi lớp tương đương của quan hệ này đươc gọi là một *mảng liên thông* (hay *thành phần liên thông*).

Kí hiệu: p là *số mảng liên thông* của một đồ thị.
Một đồ thị G được gọi là $p-$ *liên thông* nếu như G liên thông và vẫn còn là đồ thị liên thông nếu như ta bỏ đi ít hơn p đỉnh tùy ý cùng với các cạnh kề với các đỉnh này.

Định nghĩa 1.2.5. *Bậc của một đỉnh* là số cạnh kề với đỉnh đó và thường kí hiệu $d(a)$ là bậc của đỉnh a trong đồ thị G. *Bậc của đồ thị* là số các đỉnh, thường được kí hiệu là n.

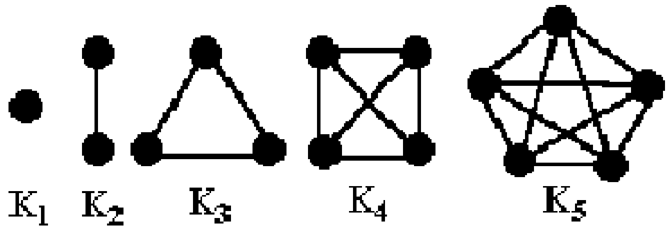
Định lý 1.2.1. *Tổng tất cả các bậc của đỉnh trong một đồ thị bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó.*

Chứng minh. Ta tính bậc của đỉnh. Mỗi đỉnh thuộc một cạnh nào đó thì bậc của nó tăng thêm 1. Mà mỗi cạnh thì có hai đỉnh. Do đó tổng tất cả các bậc của đỉnh là gấp đôi số cạnh của đồ thị.

Hệ quả 1.2.1. *Số đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị phải là một số chẵn.*

Định lý 1.2.2. *Đồ thị G có n đỉnh. Nếu bậc của mỗi đỉnh trong G không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì đồ thị G liên thông.*

Chứng minh Ta chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử đồ thị G liên thông. Khi đó có ít nhất hai đỉnh a và b nằm trong hai mảng liên thông khác nhau. Vậy thì, $n \leq d(a) + d(b) \leq n - 2$. Suy ra điều mâu thuẫn.
Một số tính chất của bậc của một đỉnh
Đỉnh có bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập* (isolated vertex).
Đỉnh có bậc 1 được gọi là *đỉnh treo*, cạnh tới đỉnh treo gọi là *cạnh treo.*
Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là *đồ thị rỗng.*
Đồ thị được gọi là *đồ thị phẳng* nếu nó có thể biểu diễn được trên mặt phẳng sao cho không có hai đường biểu diễn nào cắt nhau.
Đồ thị được gọi là *đồ thị đầy đủ* nếu hai đỉnh bất kì đều có cạnh nối, tức là mỗi đỉnh của đồ thị đều kề với mọi đỉnh khác. Ta kí hiệu K_n là đồ thị vô hướng đầy đủ n đỉnh.
Trong đồ thị K_n, mỗi đỉnh đều có bậc là $n - 1$ và đồ thị là liên thông. Hai đỉnh bất kì được nối với nhau bằng một đường đi ngắn nhất có độ dài bằng 1, đó chính là cạnh nối hai đỉnh ấy.
Ví dụ 1.4: Ví dụ về đồ thị K_n.

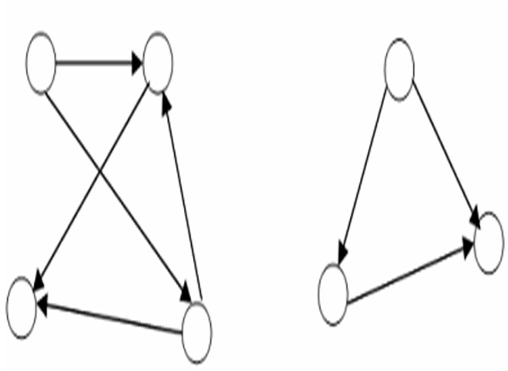


1.3 Chu số và sắc số của đồ thị

1.3.1 Chu số của đồ thị

Định nghĩa 1.3.1. Cho đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Đại lượng $c = m - n + p$ được gọi là *chu số* của đồ thị G.

Ví dụ 1.5 Xét đồ thị sau:



Hình 1.5 Đồ thị định hướng không liên thông

Đồ thị trên có $n = 7, m = 8, p = 2$.Vậy chu số $c = 8 - 7 + 2 = 3$

Định lý 1.3.1. *Nếu thêm một cạnh mới vào đồ thị G thì chu số tăng thêm 1 hoặc không thay đổi.*

Chứng minh Giả sử thêm cạnh mới (a, b) vào đồ thị G. Khi đó m tăng thêm 1.

i) Nếu hai đỉnh a, b thuộc cùng một mảng liên thông thì n, p không đổi, do vậy chu số tăng thêm 1.

ii) Nếu hai đỉnh a, b thuộc hai mảng liên thông khác nhau trong G thì p giảm đi 1, do vậy chu số không đổi.

Hệ quả 1.3.1. *Chu số của đồ thị là một số nguyên không âm.*

Chứng minh Thật vậy, đồ thị G được xây dựng từ đồ thị G_0 gồm n đỉnh và không có cạnh nào cả. Sau đó lần lượt thêm các cạnh vào đồ thị G_0 để được đồ thị G.
Chu số của G_0 là $c = 0 - n + n = 0$. Quá trình thêm cạnh không làm giảm chu số. Vậy chu số của G lớn hơn hoặc bằng chu số của $G_0 = 0$.

1.3.2 Sắc số của đồ thị

Khái niệm sắc số liên quan đến bài toán tô màu đồ thị như sau:
Hãy tô màu các đỉnh của đồ thị đã cho, sao cho hai đỉnh kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau.
Ta nói rằng, đồ thị G tô được bằng k màu nếu tồn tại hàm

$$m : V \to \{0, 1, 2, ..., k-1\}$$

sao cho, nếu hai đỉnh x và y kề nhau thì $m(x) \neq m(y)$.
Dễ thấy rằng, đồ thị G tô màu được khi và chỉ khi nó không có đỉnh nút.

Định nghĩa 1.3.2. *Sắc số* của một đồ thị chính là số màu ít nhất dùng để tô màu các đỉnh của đồ thị đó.
Ta kí hiệu $\chi(G)$ là sắc số của đồ thị G. Hiển nhiên $\chi(G) \leq n$. Nghĩa là sắc số (số màu) không vượt quá số đỉnh của đồ thị.
Tập $B \subseteq V$ được gọi là *tập ổn định trong* của đồ thị G nếu: $\forall x \in B : B \cap F(x) = \emptyset$

Nhận xét *Mỗi cách tô màu m cho đồ thị G ứng với một cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau, mỗi tập ứng với một màu. Ngược lại, mỗi cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau sẽ cho ta một cách tô màu.*

Ví dụ 1.6 Tìm sắc số của đồ thị G sau: