Hàm $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định tại mỗi điểm $x = (x_1, ...x_n) \in V \subset R^n$ và lấy giá trị trong không gian R^1, gọi là hàm nhiều biến, xác định trong V.

Đồ thị của hàm nhiều biến. Tương tự như hàm 2 biến, tập hợp các điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n, w) \in R^{n+1}$ tạo thành mặt cong, gọi là đồ thị của hàm f.

Mặt đồng mức. Tập hợp các điểm $N = (x_1, x_2, ...x_n) \in R^n$ thỏa mãn phương trình $f(x_1, x_2, ...x_n) = f(x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) = const.$ được gọi là mặt đồng mức đi qua điểm $N^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0)$

Đạo hàm riêng. Chỉ trừ ra biến x_i là biến thiên, các biến còn lại được cố định, khi đó ta có hàm 1 biến x_i và có thể tính đạo hàm theo biến này. Đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm f theo biến x_i, và ký hiệu: $w'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

gradient của hàm nhiều biến: Các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm f tạo thành véc tơ: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, gọi là véc tơ gradient của hàm f và ký hiệu là $\overrightarrow{grad}(f)$

Tính chất của véc tơ gradient.

1. Véc tơ $\overrightarrow{grad}(f)$ tại điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ luôn vuông góc với mặt đồng mức của hàm f tại điểm đó.
2. Nếu hàm $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ khả vi tại điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là điểm nào đó, khi đó.

Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ là tốc độ biến thiên tức thời của f tại $x = (x_1, ...x_n)$, khi x_i thay đổi.
Hàm $f(x_1, x_2, ...x_n)$ được gọi là *khả vi* tại điểm $x = (x_1, ...x_n)$, nếu nó có đạo hàm riêng theo mọi biến x_j tại điểm đó.

Định nghĩa

Điểm x^* được gọi là điểm đạt cực tiểu (cực đại) của hàm w, nếu tồn tại một lân cận $U(x^*)$ sao cho $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in U(x^*)$ $(f(x^*) \geq f(x), \forall x \in U(x^*))$

Nếu tại điểm cực trị của hàm nhiều biến tồn tại mọi đạo hàm riêng, thì tại đó các đạo hàm riêng phải bằng 0, hay là $grad(f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)) = \mathbf{0}$

Định thức Hessian: $H_n = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{n \times n}$

Từ H_n, ta lập n định thức con H_k chính như sau:

$$H_k = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{k \times k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \end{vmatrix}$$

gọi là định thức con chính cấp k với $k = 1..n$.

Điều kiện đủ của cực trị

Theorem (Điều kiện đủ của cực trị)

Tại điểm dừng, nếu tất cả các định thức con chính không âm, tức là $\det(H_k) \geq 0, \forall k = 1..n$*, thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm đó. Nếu các định thức con chính cấp lẻ không dương và các định thức con chính cấp chẵn không âm* $(-1)^k H_k \geq 0$*, thì hàm đạt cực đại tại điểm đó.*

Ví dụ *Giả sử năng suất y của một giống cây phụ thuộc phân bón N, P, K theo công thức sau:*

$$y = -N^2 - P^2 - K^2 + 12N + 6P + 8K + 5$$

Hãy tìm lượng phân bón sao cho đạt năng suất cao nhất

Giải

a) Điều kiện cần. Tìm điểm dừng: $\begin{cases} y'_N = -2N + 12 = 0 \\ y'_P = -2P + 6 = 0 \\ y'_K = -2K + 8 = 0 \end{cases}$

Giải ra ta có điểm dừng $(N, P, K) = (6, 3, 4)$

Điều kiện đủ

b) **Điều kiện đủ.** Các đạo hàm cấp 2:

$y''_{NN} = -2; \quad y''_{NP} = 0; \quad y''_{NK} = 0$

$y''_{PN} = 0; \quad y''_{PP} = -2; \quad y''_{PK} = 0$

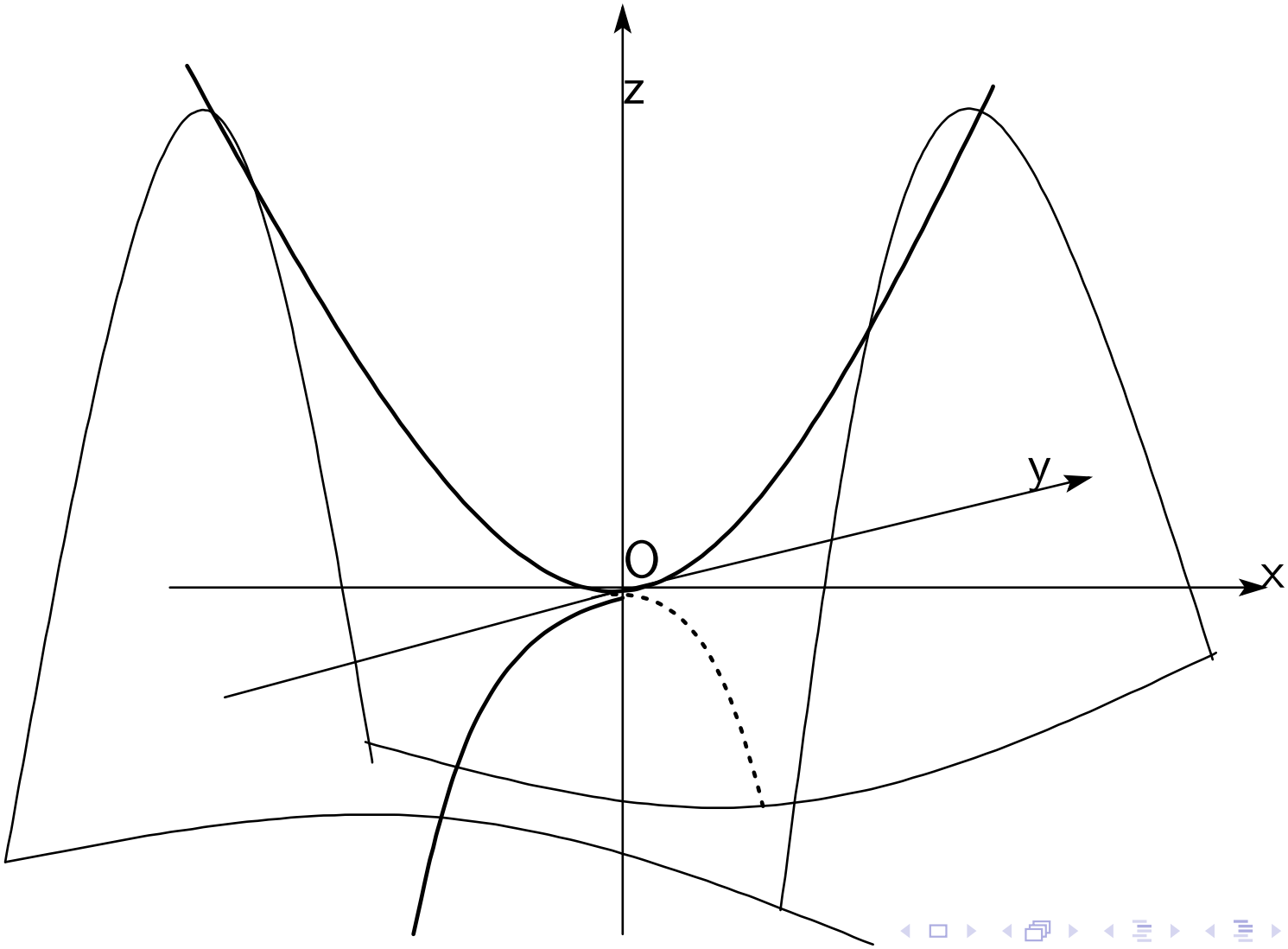
$y''_{KN} = 0; \quad y''_{KP} = 0; \quad y''_{KK} = -2$

Định thức Hessian: $H_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ Các định thức con chính:

$det(H_1) = -2 < 0; det(H_2) = 4 > 0; det(H_3) = -8 < 0$ Hàm đạt cực đại tại $(6, 3, 4)$, đó là điểm năng suất lúa đạt cao nhất.

Mặt yên ngựa

Ví dụ Tìm cực trị của hàm: $z = x^2 - y^2$
Giải Tương tự như trên ta tìm được điểm dừng $(x, y) = (0, 0)$.
Điểm này không phải là điểm cực trị, nó là điểm yên ngựa.



Xét doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo sản xuất một loại sản phẩm. Mục tiêu của doanh nghiệp là thu lợi nhuận tối đa trên cơ sở sử dụng hợp lý các yếu tố đầu vào là lao động và tư bản. Doanh nghiệp phải chấp nhận giá cả thị trường, kể cả đầu vào và đầu ra. Gọi p là giá thị trường của sản phẩm do doanh nghiệp sản xuất. p_K, p_L là giá thuê vốn và thuê lao động. Hàm sản xuất là $Q = Q(K, L)$. Khi đó hàm lợi nhuận sẽ là:

$$\Pi = pQ(K, L) - (p_K K + p_L L + C_0)$$

trong đó, $pQ = pQ(K, L)$ là tổng doanh thu, $p_K K + p_L L$ là tổng chi phí, C_0 là chi phí cố định.

Khi đó, điều kiện cần của cực trị là:

$\pi'_K = pQ'_K - p_K = 0$ và $\pi'_L = pQ'_L - p_L = 0$.

Hay là:

$$pQ'_K = p_K \text{ và } pQ'_L = p_L \tag{1}$$

Ý nghĩa kinh tế của (1): *Điều kiện cần để thu được lợi nhuận tối đa, thì doanh nghiệp phải sử dụng các yếu tố đầu vào giá trị bằng tiền của sản phẩm hiện vật cận biên của tư bản đúng bằng giá tư bản và giá trị bằng tiền của sản phẩm hiện vật cận biên của lao*

Điều kiện đủ

Điều kiện đủ để thu được lợi nhuận tối đa là:

$$\pi''_{KK} = pQ''_{KK} < 0; \pi''_{LL} < pQ''_{LL} < 0$$

$$\pi''_{KK}\pi''_{LL} - (\pi''_{KL})^2 = p^2[Q''_{KK}Q''_{LL} - (Q''_{KL})^2 > 0$$

vì $p > 0$, từ trên ta có:

$$Q_{KK} < 0, Q_{LL} < 0 \tag{2}$$

$$Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}^2 > 0 \tag{3}$$

Điều kiện (2) biểu hiện lợi ích cận biên giảm dần. Còn điều kiện (3) có nghĩa là: mặc dù lợi ích cận biên giảm dần đã xảy ra tại điểm dừng, nhưng không xảy ra (3), hay nói cách khác, bất đẳng thức xảy ra theo chiều ngược lại $Q_{KK}Q_{LL} < Q_{KL}^2$ lợi nhuận tối đa vẫn chưa đạt được nếu sự thay đổi của yếu tố đầu vào này lại ảnh hưởng mạnh hơn tới sản phẩm cận biên của yếu tố đầu vào kia so với ảnh hưởng đối với sản phẩm cận biên của chính yếu tố đầu vào đó.

Sản xuất nhiều loại sản phẩm

Giả sử doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo, lúc này giá sản phẩm là do thị trường quyết định, giả sử doanh nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm với giá bán là p_1, p_2. Khi đó hàm tổng lợi nhuận là

$$\Pi = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

Cần chọn cơ cấu sản xuất sao cho lợi nhuận đạt tối đa. Trong cạnh tranh độc quyền, giá là do nhà độc quyền quyết định. Giả sử doanh nghiệp độc quyền sản xuất 3 loại sản phẩm với hàm chi phí $TC = TC(Q_1, Q_2, Q_{,3})$, doanh nghiệp độc quyền được tự định giá sản phẩm của mình dựa vào chi phí sản xuất và nhu cầu thị trường. Giả sử hàm cầu là:

$$p_1 = p_1(Q_1); p_2 = p_2(Q_2); p_3 = p_3(Q_3)$$

Hàm lợi ích: $\pi = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + p_3 Q_3 - TC(Q_1, Q_2, Q_3$ Hàm lợi ích là hàm 3 biến Q_1, Q_2, Q_3, áp dụng phương pháp tìm cực trị của hàm nhiều biến đã trình bày ở trên

Cực trị có điều kiện

Giả sử ta phải giải bài toán:

$$f(x) \to min(max); \tag{4}$$

$$g_i(x) = b_i; \quad i = 1..m; \tag{5}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad m < n \tag{6}$$

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, các phương trình $g_i(x) = b_i$ được gọi là các ràng buộc.
Bài toán có thể giải bằng phương pháp nhân tử Lagrange. Gồm các bước sau đây:
Bước 1. Lập hàm Lagrange:

$$L(\lambda_1, ..., \lambda_m, x_1, ..., x_n) = f(x) + \lambda_1(b_1 - g_1(x)) + ... + \lambda_m(b_m - g_m(x))$$

Hàm Lagrange có $m + n$ biến $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m, x_1, ...x_n$