ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

BIẾN DẠNG CHAOTIC CỦA TOÁN TỬ HỢP THÀNH TRÊN KHÔNG GIAN HARDY

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Toán giải tích

Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho đĩa đơn vị mở $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, ký hiệu $H^2(\mathbb{D})$ là không gian Hardy của các hàm f chỉnh hình trên $\mathbb{D}$ với chuẩn

$$\|f\| = \lim_{r \to 1-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Giả sử ψ là tự đồng cấu chỉnh hình của $\mathbb{D}$. Khi đó toán tử hợp thành $C_\psi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ được định nghĩa $C_\psi f = f \circ \psi$, là một toán tử tuyến tính bị chặn trên $H^2(\mathbb{D})$. Nếu ψ không có điểm cố định trong $\mathbb{D}$ thì ψ có một hoặc hai điểm cố định trên $\partial\mathbb{D}$. Ta gọi ψ là *parabolic* nếu nó chỉ có một điểm biên cố định và là *hyperbolic* nếu nó có hai điểm biên cố định, với γ là một số phức. Luận văn trình bày kết quả sau:

1. Nếu ψ là tự đẳng cấu hyperbolic của $\mathbb{D}$ và $\lambda > 1$ là đạo hàm tại điểm đẩy cố định của ψ. Khi đó bội vô hướng của toán tử hợp thành γC_ψ là chaotic trên $H^2(\mathbb{D})$ khi và chỉ khi $\lambda^{-1/2} < |\gamma| < \lambda^{1/2}$

2. Nếu ψ là tự đẳng cấu parabolic của $\mathbb{D}$. Khi đó γC_ψ là chaotic trên $H^2(\mathbb{D})$ khi và chỉ khi $|\gamma| = 1$.

3. Nếu ψ là tự đẳng cấu của $\mathbb{D}$, nó có một điểm cố định trong $\mathbb{D}$. Khi đó γC_ψ không là chaotic trên $H^2(\mathbb{D})$ với mọi $\gamma \in \mathbb{C}$.

Đó là kết quả trong bài báo "*Chaotic behavior of composition operators on the Hardy space*" của Takuya Hosokawa về việc nghiên cứu biến dạng chaotic của toán tử hợp thành trên không gian Hardy $H^2(\mathbb{D})$ thông qua việc phân loại điểm dính trên biên của dãy trọng lặp. Luận văn gồm 2 chương:

- *Chương 1*: Trình bày một số kiến thức cơ sở, đặc biệt là các kiến thức sử dụng cho việc chứng minh chương sau, như khái niệm hàm chỉnh hình, điều kiện Cauchy-Riemann, công thức tích phân Cauchy, nguyên lý cực đại, định lý khai triển Taylor, không gian Hardy và tính chất của nó.

- *Chương 2*: Trình bày và làm rõ công trình nghiên cứu của Takuya Hosokawa về biến dạng chaotic của toán tử hợp thành trên không gian Hardy $H^2(\mathbb{D})$, như các tính chất cơ bản của toán tử hợp thành trên không gian Hardy, đặc biệt là tính hypercyclic của toán tử này, áp dụng định lý Denjoy-Wolf về phân loại các điểm dính hyperbolic, elliptic nằm trên đường tròn đơn vị để nghiên cứu chaotic của toán tử hợp thành.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn PGS - TSKH Nguyễn Quang Diệu, người thầy đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm Hà Nội và các thầy cô giáo Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy, giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn Trường trung học phổ thông Dương Tự Minh, thành phố Thái Nguyên, gia đình và bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình tác giả học tập.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Chương 1

HÀM CHỈNH HÌNH, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY VÀ KHÔNG GIAN HARDY

Trong chương trình bày một số kiến thức cơ sở, đặc biệt là các kiến thức sử dụng cho việc chứng minh chương sau, như khái niệm hàm chỉnh hình, điều kiện Cauchy-Riemann, công thức tích phân Cauchy, nguyên lý cực đại, định lý khai triển Taylor, không gian Hardy $H^2(\mathbb{D})$ và tính chất.

1.1. Khái niệm về hàm chỉnh hình

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. *Cho hàm số f xác định trên miền $\Omega \in \mathbb{C}$. Xét giới hạn*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad \text{với} \quad z, z+\Delta z \in \Omega.$$

Nếu tại điểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z, ký hiệu $f'(z)$ hay $\frac{df}{dz}(z)$. Như vậy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$- khả vi tại z.

Định nghĩa 1.1.2. *Hàm f xác định trong miền $\Omega \in \mathbb{C}$ với giá trị trong $\mathbb{C}$ gọi là hàm chỉnh hình tại $z_0 \in \Omega$ nếu tồn tại $r > 0$ để f $\mathbb{C}$-khả vi tại mọi $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$. Nếu f chỉnh hình tại mọi $z \in \Omega$ ta nói f chỉnh hình trên Ω.*

Định lý 1.1.3. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền và $H(\Omega)$ là tập các hàm chỉnh hình trên Ω. Khi đó*

1. *$H(\Omega)$ là một không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$.*

2. *$H(\Omega)$ là một vành.*

3. *Nếu $f \in H(\Omega)$ và $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$ thì $\dfrac{1}{f} \in H(\Omega)$.*

4. *Nếu $f \in H(\Omega)$ và f chỉ nhận giá trị thực thì f là không đổi.*

Chứng minh. Chứng minh 4.

Do f chỉ nhận giá trị thực $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng chỉ nhận giá trị thực. Nhưng mặt khác $\dfrac{\partial f}{\partial x} = i\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ta suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Vậy $f = const$. □

1.1.2. Điều kiện Cauchy - Riemann

Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x + iy$ xác định trên miền $\Omega \in \mathbb{C}$. Hàm f được gọi là $\mathbb{R}^2$- khả vi tại $z = x + iy$ nếu hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) (theo định nghĩa đã biết trong giải tích thực).

Định lý 1.1.4. *Để hàm f $\mathbb{C}$- khả vi tại $z = x + iy \in \Omega$ điều kiện cần và đủ là f $\mathbb{R}^2$- khả vi tại z và điều kiện Cauchy - Riemann sau được thỏa mãn tại z.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Chứng minh. **Điều kiện cần:**

Giả sử f $\mathbb{C}$ - khả vi tại $z = x + iy \in \Omega$. Khi đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{với} \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Vì nếu giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách tiến đến điểm 0 của Δz nên nếu chọn $\Delta z = \Delta x$, ta có :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

tức là u và v có đạo hàm riêng theo x tại (x, y) và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \tag{1.1.2}$$

Tương tự bằng cách chọn $\Delta z = i\Delta y$ ta có

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \tag{1.1.3}$$

So sánh (1.1.2) và (1.1.3) ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Ta còn phải chứng tỏ $u(x, y)$ và $v(x, y)$ khả vi tại (x, y).

Vì f $\mathbb{C}$- khả vi tại z nên

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(\Delta z)$$

với $o(\Delta z)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δz, tức là

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

Rõ ràng

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v, \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

theo (1.1.2) ta có

$$\Delta u + i\Delta v = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) + io(\Delta z).$$

Từ đó

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|),$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|).$$

điều kiện đó nghĩa là u và v khả vi tại (x, y).

Điều kiện đủ:

Vì u và v khả vi tại (x, y) nên

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

và

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Theo điều kiện (1.1.1) hai đẳng thức này có thể viết thành

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(|\Delta z|), \tag{1.1.4}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(|\Delta z|). \tag{1.1.5}$$

Từ (1.1.4) và (1.1.5) ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u}{\Delta z} + i\frac{\Delta v}{\Delta z} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} + i\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta z} + \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x}{\Delta z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

tức là f $\mathbb{C}$- khả vi tại $z = x + iy$. $\square$

Nhận xét 1.1.5. (1.) Giả sử f là $\mathbb{R}^2$-khả vi tại $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$

Xét vi phân

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{1.1.6}$$

Vì $dz = dx + idy$ và $d\bar{z} = dx - idy$ nên

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}).$$

Thế các đẳng thức này vào (1.1.6) ta có

$$df = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z}.$$

Nếu đặt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) \tag{1.1.7}$$

thì

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{1.1.8}$$

Bởi vì

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})]$$

nên f thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại z nếu và chỉ nếu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$

Nói cách khác hàm $\mathbb{R}^2$-khả vi f tại z là C-khả vi nếu và chỉ nếu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$

(2.) Từ (1.1.1) và (1.1.2) và nhận xét trên, nếu f $\mathbb{C}$-khả vi tại z thì ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}(z) + 2i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right] = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = f'(z).\end{aligned}$$