ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THU HOÀI

DẠNG TỰ ĐẲNG CẤU VÀ BIỂU DIỄN NHÓM GL(2,$\mathbb{R}$)

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Toán giải tích

Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH Đỗ Ngọc Diệp

Thái Nguyên - 2011

Mục lục

MỞ ĐẦU

Dạng tự đẳng cấu là khái niệm lần đầu được đưa vào bởi Poincaré: hàm số trên không gian đối xứng G/K, G là nhóm Lie, K là nhóm con compact cực đại, biến đổi theo một công thức đơn giản với tác động của một nhóm con số học. G. Gelfand nhìn dạng tự đẳng cấu theo góc độ của các biểu diễn tự đẳng cấu, một bộ phận của lý thuyết biểu diễn vô hạn chiều và nghiên cứu phổ, giá trị riêng của toán tử Hecke...

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu lý thuyết dạng tự đẳng cấu và biểu diễn trong trường hợp nhóm $GL(2,\mathbb{R})$. Ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ giữa lý thuyết biểu diễn nhóm $GL(2,\mathbb{R})$ và các dạng tự đẳng cấu trên nửa mặt phẳng trên Poincaré. Ta sẽ tập trung vào lý thuyết phổ trong trường hợp thương compact.

Luận văn với đề tài "Dạng tự đẳng cấu và biểu diễn nhóm $GL(2,\mathbb{R})$" gồm 3 chương:

- *Chương 1*: Lý thuyết dạng tự đẳng cấu trên $GL(2,\mathbb{R})$.
- *Chương 2*: Biểu diễn nhóm $GL(2,\mathbb{R})$.
- *Chương 3*: Một số tính toán.

Trong chương 1 chúng tôi trình bày một số khái niệm liên quan đến lý thuyết dạng tự đẳng cấu trên nhóm $GL(2,\mathbb{R})$, nhắc lại một số khái niệm về toán tử trong không gian Hilbert, sơ lược về nhóm Lie, đại số Lie và xây dựng đại số phổ dụng của nó. Đặc biệt, trọng tâm của chương này chính mối liên hệ giữa bài toán phổ với thương compact của nửa mặt phẳng Poincaré.

Trong chương 2, từ lý thuyết của các dạng tự đẳng cấu, chúng tôi trình bày một số biểu diễn, chẳng hạn biểu diễn của nhóm compact địa phương, biểu diễn của đại số Lie và một kết quả quan trọng là sự phân loại các $(\mathfrak{g}, K)$-module bất khả quy của nhóm $G = GL(2,\mathbb{R})^+$.

Trong chương 3 chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến biểu diễn của nhóm $GL(2,\mathbb{R})$.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn GS.TSKH Đỗ Ngọc Diệp người thầy đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên và các thầy cô giáo Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy, giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn Trường Cao đẳng Công nghiệp Nam Định, gia đình và bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình tác giả học tập.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2011

Chương 1

LÝ THUYẾT DẠNG TỰ ĐẲNG CẤU TRÊN $GL(2,\mathbb{R})$

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu lý thuyết phổ của các dạng tự đẳng cấu. Trong trường hợp $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, phổ của toán tử Laplace-Beltrami là rời rạc. Ngoài ra không gian Hilbert $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ khai triển thành các không gian bất khả qui.

1.1. Một số khái niệm cơ bản

Cho $\mathcal{H}$ là nửa mặt phẳng Poincaré: $\mathcal{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$. Đặt $G = GL(2,\mathbb{R})^+$ là nhóm các ma trận thực cấp 2 với định thức dương. Khi đó G tác động trên $\mathcal{H}$ bởi phép biến đổi phân thức tuyến tính. Nghĩa là nếu $g \in GL(2,\mathbb{R})^+$ và $z = x+iy \in \mathcal{H},\ y > 0$ thì tác động của g tại z cho bởi: $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Cho Γ là nhóm con rời rạc của *G,* sao cho $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ là compact, hoặc ít nhất có diện tích hữu hạn. Giả thiết rằng $-I \in \Gamma$, bởi vì nếu $-I \notin \Gamma$, thay Γ bởi nhóm sinh bởi Γ và $-I$. (I là ma trận đơn vị cấp 2). Mặt khác, không mất tính tổng quát, giả thiết rằng $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ (nhóm các ma trận cấp 2 với hệ số thực và định thức bằng 1).

Định nghĩa 1.1.1. Cho H là một nhóm, *đặc trưng của* H là một đồng cấu $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$. *Đặc trưng unitary* là một đặc trưng thoả mãn $|\chi(\gamma)| = 1$ với mọi γ.

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử Γ là nhóm con đồng dư, $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ là đường xạ ảnh trên $\mathbb{Q}$.. Do $SL(2,\mathbb{Z})$ tác động bắc cầu trên $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, nên nhóm con chỉ số hữu hạn chỉ có thể có quỹ đạo hữu hạn trên tập này. Một quỹ đạo của Γ trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ được gọi là *điểm nhọn* của Γ. Tổng quát hơn, nếu Γ không giả thiết là nhóm con đồng dư, mà chỉ là một nhóm rời rạc tác động trên $\mathcal{H}$ với $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ có diện tích hữu hạn, thuật ngữ điểm nhọn được dùng để chỉ là một trong hai trường hợp:

- Điểm $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sao cho Γ chứa một phần tử parabolic $\gamma \neq I$ với $\gamma(a) = a$.

- Quỹ đạo của các điểm nói trên dưới tác động của Γ.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử k là "trọng", nó có thể là số nguyên dương hoặc nguyên âm. Xem $z = x + iy$ và $\bar{z} = x - iy$ là các biến phức độc lập, ta có các đạo hàm riêng tương ứng

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ta định nghĩa các toán tử vi phân Maass trên $C^\infty(\mathcal{H})$, không gian các hàm trơn của $\mathcal{H}$

$$R_k = iy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{k}{2} = (z - \bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k}{2},$$

$$L_k = -iy\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{k}{2} = -(z - \bar{z})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{k}{2}$$

và toán tử Laplace suy rộng

$$\Delta_k = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\frac{\partial}{\partial x}.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\Delta_k = -L_{k+2}R_k - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) = -R_{k-2}L_k + \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right).$$

Với mỗi k, định nghĩa *tác động của* $G = GL(2,\mathbb{R})^+$ *trên* $C^\infty(\mathcal{H})$ bởi công thức:

$$f|_k g = \left(\frac{c\bar{z}+d}{|cz+d|}\right)^k f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Bổ đề 1.1.4. *Nếu* $f \in C^\infty(\mathcal{H}), \quad g \in G$, *thì*

$$(R_k f)|_{k+2} g = R_k\left(f|_k g\right),$$
$$(L_k f)|_{k-2} g = L_k\left(f|_k g\right),$$

và

$$(\Delta_k f)|_k g = \Delta_k\left(f|_k g\right).$$

1.2. Toán tử trong không gian Hilbert

Nhắc lại một số khái niệm cơ bản sau:

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử $\mathfrak{H}$ là không gian Hilbert. Toán tử trên $\mathfrak{H}$ được định nghĩa là *biến đổi tuyến tính* trên tập con trù mật, tức là một cặp có thứ tự (T, D_T), trong đó D_T là không gian con tuyến tính trù mật của $\mathfrak{H}$, được gọi là *miền xác định của T,* và $T : D_T \to \mathfrak{H}$ là *phép biến đổi tuyến tính.*

+ Toán tử T được gọi là *đóng* nếu đồ thị của nó $\{(f, Tf) | f \in D_T\}$ là không gian con đóng của $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$.

+ Toán tử T được gọi là *không bị chặn* nếu nó không liên tục khi D_T được xem như một không gian con topo của $\mathfrak{H}$.

+ Toán tử T được gọi là *đối xứng* nếu $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ với $f, g \in D_T$, trong đó $\langle\,,\rangle$ là tích vô hướng trong không gian Hilbert $\mathfrak{H}$.

+ Toán tử T được gọi là *tự liên hợp* nếu $D_T = D_{T^*}$ và $T = T^*$, trong đó T^* là liên hợp của T, D_{T^*} là không gian của $\forall g \in \mathfrak{H}$ sao cho $f \mapsto \langle Tf, g\rangle$ là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên D_T. Toán tử (T^*, D_{T^*}) được gọi là liên hợp của T.

Nếu $\mathfrak{H}$ là không gian Hilbert tách được thì:

+ Toán tử tuyến tính $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ được gọi là *bị chặn* nếu miền xác định của nó là toàn bộ $\mathfrak{H}$, và nếu tồn tại hằng số C sao cho $|Tx| \leq C|x|$ với $\forall x \in \mathfrak{H}$. Hằng số C nhỏ nhất như vậy được gọi là chuẩn toán tử của T, và kí hiệu là $|T|$.

+ Toán tử $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ được gọi là *compact,* hoặc hoàn toàn liên tục, nếu T chuyển các tập bị chặn thành các tập compact. Do $\mathfrak{H}$ là tách, tập con của $\mathfrak{H}$ là compact nếu và chỉ nếu nó là compact dãy. Vì vậy T là compact nếu và chỉ nếu với mỗi dãy $x_n \subset \mathfrak{H}$ của các vectơ đơn vị, tồn tại dãy con y_n sao cho $T(y_n)$ là hội tụ.

Định nghĩa 1.2.2. Giả sử $L^2(\mathcal{H})$ là không gian Hilbert các hàm đo được trên $\mathcal{H}$ có bình phương khả tích tương ứng với độ đo G-bất biến $y^{-2}dx \wedge dy$.

Khi đó Δ_k được xác định trên không gian con trù mật $C_c^\infty(\mathcal{H})$ của $L^2(\mathcal{H})$. (Nếu M là một đa tạp khả vi, thì $C^\infty(M)$ là *không gian các hàm trơn trên M* và $C_c^\infty(M)$ *là không gian con các hàm giá compact*. Nếu X là không gian tôpô, $C_c(X)$ là *không gian các hàm liên tục* giá compact trên X).

Cho $\Delta_e = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ là toán tử Laplace. Kí hiệu d là đạo hàm ngoài, đưa 1-dạng vi phân thành 2-dạng vi phân. Giả sử f và g là các hàm trơn xác định trong lân cận của một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}$, mà biên là đường cong trơn (hoặc hợp của các đường cong trơn) $\partial\Omega$. Ta có đồng nhất thức

$$\begin{aligned} &d\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}d\mathrm{x}\right) - f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dy - \frac{\partial g}{\partial y}d\mathrm{x}\right)\right) \\ &\quad = (g\Delta^e f - f\Delta^e g)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Theo định lý Stokes, ta có

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (g\Delta^e f - f\Delta^e g)\, dx \wedge dy \\ &\quad = \int_{\partial\Omega} \left(g\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}d\mathrm{x}\right) - f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dy - \frac{\partial g}{\partial y}d\mathrm{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Hướng của đường lấy tích phân là (biên $\partial\Omega$) lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Đồng nhất thức này được biết đến như công thức Green.

Mệnh đề 1.2.3. *Laplace Δ_k là toán tử đối xứng trên $L^2(\mathcal{H})$ với miền xác định $C_c^\infty(\mathcal{H})$.*

1.3. Đại số Lie và đại số phổ dụng

Định nghĩa 1.3.1. *Nhóm Lie* là một nhóm, đồng thời là một đa tạp khả vi hữu hạn chiều, trong đó các phép toán nhân và phép nghịch đảo là các ánh xạ trơn.

Định nghĩa 1.3.2. *Đại số Lie* là không gian vec tơ (thực hoặc phức) $\mathfrak{g}$ được trang bị phép toán song tuyến tính, được gọi là *móc Lie*, thỏa mãn một số tiên đề sau: Phép toán móc, biểu diễn bởi $X,Y \mapsto [X,Y]$ với $X,Y \in \mathfrak{g}$, được giả thiết thỏa mãn

$$[X,Y] = -[Y,X], \quad [X,X] = 0,$$

và "đồng nhất Jacobi"

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Trong trường hợp đại số Lie liên kết với đại số kết hợp A, phép toán móc Lie được định nghĩa bởi $[X,Y] = XY -$ YX, trong đó phép nhân ở vế phải là phép nhân trong đại số A.

Định nghĩa 1.3.3. Hàm tử $[X,Y] = XY -$ YX, ứng một đại số kết hợp A với đại số Lie Lie(A). Ta cũng tương ứng một đại số Lie $\mathfrak{g}$ với một đại số kết hợp $U(\mathfrak{g})$, được gọi là *đại số bao phổ dụng của* $\mathfrak{g}$. Nói chung, dù $\mathfrak{g}$ là hữu hạn chiều, $U(\mathfrak{g})$ sẽ là vô hạn chiều.

Để xây dựng $U(\mathfrak{g})$, ta bắt đầu với đại số tenxơ $\otimes\mathfrak{g}$,

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k g, \quad \otimes^k g = \underbrace{g \otimes \ldots \otimes g}_{k},$$

trong đó phép nhân $\otimes^k \mathfrak{g} \times \otimes^l \mathfrak{g} = \otimes^{k+l} \mathfrak{g}$ là tích tenxơ ($\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$ hoặc $\otimes_{\mathbb{C}}$ tùy thuộc $\mathfrak{g}$ là đại số Lie thực hoặc phức).

Định nghĩa 1.3.4. Giả sử V là không gian vectơ thực, $U(\mathfrak{g})$ là đại số bao phổ dụng của $\mathfrak{g}$. *Phức hóa* của $U(\mathfrak{g})$ là $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, tức là không gian vectơ phức, với luật nhân $\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, thỏa mãn

$$a(b \otimes v) = (ab) \otimes v, \quad a, b \in \mathbb{C},\ v \in V.$$

Số chiều phức của $V_{\mathbb{C}}$ bằng số chiều thực của V.

Cho $\mathfrak{g}$ là đại số Lie thực, phức hóa $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ của $\mathfrak{g}$ là đại số Lie phức.

Cho $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ là biểu diễn của đại số Lie thực, trong đó V là không gian vectơ phức. Khi đó ta có thể mở rộng ρ thành biểu diễn $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to End(V)$ như sau: Nếu $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, viết $X = X_1 + iX_2$. Khi đó, đặt

$$\rho(X) = \rho(X_1) + i\rho(X_2).$$

1.4. Bài toán phổ cho thương compact của nửa mặt phẳng trên

1.4.1. Lý thuyết phổ của các dạng tự đẳng cấu

Cho χ là đặc trưng của Γ, $C^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H}, \chi, k)$ là không gian của các hàm trơn trên $\mathcal{H}$ sao cho

$$\chi(\gamma) f(z) = \left(\frac{c\bar{z} + d}{|cz + d|}\right)^k f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Nếu $f, g \in C^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H}, \chi, k)$, thì $f\bar{g}$ là bất biến theo Γ, vì vậy ta có thể định nghĩa

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Gamma \backslash H} f(z) \overline{g(z)} \frac{dxdy}{y^2}.$$

$L^2(\Gamma \backslash H, \chi, k)$ là không gian Hilbert đầy đủ, $f, g \in C^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H}, \chi, k)$ tương ứng với tích trong trên.