ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VIỆT HƯƠNG

VỀ CÁC TẬP GIẢ GIÁ VÀ QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN - MACAULAY CỦA CÁC MÔĐUN HỮU HẠN SINH

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN - 2011

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, nghiêm khắc của PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn. Nhân dịp này tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới GS. TSKH Nguyễn Tự Cường, PGS. TS Nguyễn Quốc Thắng, PGS.TSKH Phùng Hồ Hải, TS Vũ Thế Khôi và các thầy cô giáo Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Tôi cũng rất biết ơn cán bộ, Giáo viên trường THPT Lương Ngọc Quyến nơi tôi đang công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành kế hoạch học tập của mình.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới người thân, bạn bè đã luôn giúp đỡ, động viên để tôi hoàn thành công việc.

LỜI NÓI ĐẦU

Trong suốt luận văn, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh. Ta luôn có $\dim M \geq \operatorname{depth} M$. Nếu $\dim M = \operatorname{depth} M$ thì ta nói M là môđun *Cohen-Macaulay*. Vành R được gọi là vành *Cohen-Macaulay* nếu nó là R-môđun Cohen-Macaulay. Lớp vành và môđun Cohen-Macaulay là một trong những lớp vành và môđun quan trọng nhất của Đại số giao hoán. Chúng còn xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác của toán học như Đại số tổ hợp, Đại số đồng điều, Hình học đại số.

Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, kí hiệu bởi $\mathrm{nCM}(M)$, được xác định bởi công thức

$$\mathrm{nCM}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \text{ không là Cohen-Macaulay}\}.$$

Nhiều nhà toán học đã chứng minh tính đóng của quỹ tích không Cohen-Macaulay của các R-môđun hữu hạn sinh khi vành cơ sở R là vành thương của vành Gorenstein (chẳng hạn như P. Schenzel [S]). Cũng với giả thiết này, năm 1991, N. T. Cường [C] đã xác định chiều của $\mathrm{nCM}(M)$ thông qua một bất biến gọi là *kiểu đa thức* của M.

Gần đây, năm 2010, N. T. Cường, N. T. K. Nga, L. T. Nhàn [CNN] đã mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay của M thông qua các tập giả giá của M trong trường hợp tổng quát (không cần bất cứ điều kiện gì của R), trong đó tập *giả giá* thứ i của M, kí hiệu bởi $\operatorname{Psupp}_R M$, được định nghĩa bởi M. Brodmann và R.Y. Sharp [BS1] như sau

$$\operatorname{Psupp}^i_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Từ đó họ chứng minh tính đóng của $\mathrm{nCM}(M)$ dưới giả thiết R là vành thương của vành Cohen-Macaulay (giả thiết này là yếu hơn vì mỗi vành

Gorenstein là vành cohen-Macaulay). Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M còn được nghiên cứu trong mối quan hệ với tính catenary của vành $R/\operatorname{Ann}_R(M)$, các điều kiện Serre trên M và tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$.

Mục đích chính của luận văn là trình bày lại chi tiết các kết quả trên về quỹ tích không Cohen-Macaulay $\operatorname{nCM}(M)$ và các tập giả giá $\operatorname{Psupp}^i(M)$ của Nguyễn Tự Cường, Lê Thanh Nhàn và Nguyễn Thị Kiều Nga trong bài báo: *On pseudo supports and non-Cohen-Macaulay locus of finitely generated modules,* **323** (2010), 3029-3038. Bên cạnh đó, luận văn trình bày những tính chất cơ bản nhất của vành và môđun Cohen-Macaulay: chuyển qua đầy đủ, chuyển qua địa phương hóa, xét tính catenary phổ dụng, xét tính không trộn lẫn và đặc trưng đồng điều.

Luận văn chia làm 2 chương. Chương I trình bày các tính chất cơ bản về vành và môđun Cohen-Macaulay. Các nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay và các tập giả giá của các môđun hữu hạn sinh được viết trong Chương II.

Chương 1

Vành và môđun Cohen-Macaulay

Trong suốt luận văn này, cho R là một vành giao hoán Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh. Để tiện theo dõi, trước khi trình bày khái niệm vành và môđun Cohen-Macaulay, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất về chiều và độ sâu.

1.1 Chuẩn bị về chiều

Đặt $\operatorname{Ann}_R M = \{a \in R \mid aM = 0\}$. Khi đó $\operatorname{Ann}_R M$ là iđêan của R.

1.1.1 Định nghĩa. Một dãy $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ các iđêan nguyên tố của R thỏa mãn điều kiện $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ với mọi i được gọi là *một dãy iđêan nguyên tố độ dài* n của R. *Chiều (Krull)* của vành R, kí hiệu là $\dim R$, là cận trên của các độ dài của các dãy iđêan nguyên tố của R. *Chiều (Krull)* của M, kí hiệu là $\dim M$, là chiều của vành thương $R/\operatorname{Ann}_R M$.

1.1.2 Ví dụ. (i) Trong vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên, dãy $\{0\} \subset 2\mathbb{Z}$ là một dãy iđêan nguyên tố độ dài 1. Vì các iđêan nguyên tố của $\mathbb{Z}$ là $\{0\}$ và các iđêan có dạng $p\mathbb{Z}$ với p là số nguyên tố, nên cận trên của các độ dài của các dãy iđêan nguyên tố trong $\mathbb{Z}$ là 1. Vì thế $\dim \mathbb{Z} = 1$.

(ii) Xét vành $\mathbb{Z}_6$. Vành này có 2 iđêan nguyên tố là $3\mathbb{Z}_6$ và $2\mathbb{Z}_6$. Do đó $\dim \mathbb{Z}_6 = 0$.

Một trong những phương pháp tính chiều của các môđun hữu hạn sinh trên vành Noether là thông qua chiều của các iđêan nguyên tố liên kết, được nêu trong bổ đề sau đây. Nhắc lại rằng một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là một *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R x$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\operatorname{Ass}_R M$. *Giá* của M, kí hiệu là $\operatorname{Supp} M$, được cho bởi công thức

$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

1.1.3 Bổ đề. *Tập các iđêan nguyên tố liên kết tối thiểu của M chính là tập các iđêan nguyên tố tối thiểu chứa $\operatorname{Ann}_R M$. Đặc biệt ta có*

$$\dim M = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M\}.$$

Chứng minh. Vì M hữu hạn sinh nên $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M)$. Do đó $\min \operatorname{Supp} M = \min \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M)$. Theo [Mat, Định lí 6.5(iii)] ta có $\min \operatorname{Ass} M = \min \operatorname{Supp} M$. Do đó $\min \operatorname{Ass} M = \min \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M)$. $\square$

Mệnh đề sau đây cho ta công thức tính chiều của vành đa thức (xem [Mat, Định lí 15.4]).

1.1.4 Mệnh đề. $\dim R[x_1, \ldots, x_n] = n + \dim R$.

Đặt $R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R, \ \forall i \right\}$. Mỗi phần tử của $R[[x]]$ được gọi là một *chuỗi lũy thừa hình thức* của biến x với hệ số trong R. Định nghĩa phép cộng $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$ và phép nhân $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, trong đó $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Khi đó $R[[x]]$ là một vành giao hoán Noether, được gọi là vành *các chuỗi lũy thừa hình thức của biến x trên R*. Khi $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$ thì $R[[x]]$ cũng là vành địa phương với iđêan tối đại duy nhất

$$\mathfrak{n} = \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]], a_0 \in \mathfrak{m} \Big\}.$$

Vành chuỗi lũy thừa hình thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trên R, kí hiệu là $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, được định nghĩa tương tự.

Mệnh đề sau đây cho phép ta tính được chiều của vành các chuỗi lũy thừa hình thức (xem [Mat, Định lí 15.4]).

1.1.5 Mệnh đề. $\dim R[[x_1, \ldots, x_n]] = n + \dim R$.

1.1.6 Ví dụ. (i) Tính chiều của vành $\mathbb{Z}[x, y, z]/I$ với $I = (x^2, y) \cap (z^3)$. Đặt $R = \mathbb{Z}[x, y, z]$. Ta có $\dim R = 3 + \dim \mathbb{Z} = 4$. Chú ý rằng $\operatorname{Ass}_R(R/I) = \{(x, y), (z)\}$. Suy ra

$$\dim(R/I) = \max\{\dim(R/(x, y)), \dim(R/(z))\} = 3.$$

(ii) Tinh chiều của vành $\mathbb{R}[[x, y, z, t]]/J$ với $J = (x, y^2, z) \cap (y, z^3, t^5)$. Đặt $R = \mathbb{R}[[x, y, z, t]]$. Khi đó $\dim R = 4 + \dim \mathbb{R} = 4$. Ta có $\operatorname{Ass}_R(R/J) = \{(x, y, z), (y, z, t)\}$. Suy ra

$$\dim(R/J) = \max\{\dim R/(x, y, z), \dim(R/(y, z, t)\} = 1.$$

1.1.7 Định nghĩa. Vành Noether R được gọi là vành *địa phương* nếu nó có duy nhất một iđêan tối đại.

Từ nay về sau, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương với $\mathfrak{m}$ là iđêan tối đại duy nhất và M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$.

1.1.8 Định nghĩa. Một iđêan I của R được gọi là *iđêan nguyên sơ* nếu $I \neq R$ và từ điều kiện $xy \in I$ kéo theo $x \in I$ hoặc tồn tại số $n > 0$ sao cho $y^n \in I$ với $x, y \in R$. Giả sử I là một iđêan nguyên sơ của R. Khi đó tập $\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ để } x^n \in I\}$ là một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R, trong trường hợp này ta gọi I là *iđêan* $\mathfrak{p}$*-nguyên sơ*.

Định lí sau đây, gọi là *Định lí đa thức Hilbert - Samuel*, cho ta 2 bất biến tương đương với chiều.

1.1.9 Định lý. ([Mat, Định lí 13.4]). *Cho* $\mathfrak{q}$ *là một iđêan* $\mathfrak{m}$*-nguyên sơ. Khi đó,* $\ell(M/\mathfrak{q}^n M)$ *là một đa thức với hệ số hữu tỷ khi n đủ lớn và*

$$\begin{aligned}\dim M &= \deg \ell(M/\mathfrak{q}^n M)\\ &= \inf\left\{t \mid \exists x_1,\ldots,x_t \in \mathfrak{m}, \ell(M/(x_1,\ldots,x_t)M) < \infty\right\}.\end{aligned}$$

1.1.10 Nhận xét. Vì R là vành Noether nên $\mathfrak{m}$ là hữu hạn sinh. Do đó tồn tại hữu hạn phần tử $x_1,\ldots,x_t \in \mathfrak{m}$ sao cho $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_t)R$. Vì $\ell(M/\mathfrak{m}M) < \infty$ nên $\ell(M/(x_1,\ldots,x_t)M) < \infty$. Do đó theo Định lí đa thức Hilbert - Samuel ta suy ra $\dim M < \infty$.

1.1.11 Hệ quả. $\dim(M/(x_1,\ldots,x_r)M) \geq d-r$, $\forall x_1,\ldots,x_r \in \mathfrak{m}$.

Chứng minh. Bằng quy nạp ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $r=1$. Cho $x \in \mathfrak{m}$. Giả sử $\dim(M/xM) = k < d-1$. Đặt $M_1 = M/xM$. Theo Định lí đa thức Hilbert - Samuel, tồn tại $x_1,\ldots,x_k \in \mathfrak{m}$ sao cho $\ell(M_1/(x_1,\ldots,x_k)M_1) < \infty$. Do đó $\ell(M/(x,x_1,\ldots,x_k)M) < \infty$. Theo Định lí đa thức Hilbert - Samuel, $d = \dim M \leqslant k+1$. Do đó $d-1 \leqslant k$, vô lí. □

1.1.12 Định nghĩa. Một hệ $(x_1,\ldots,x_d) \subseteq \mathfrak{m}$ được gọi là một *hệ tham số* của M nếu $\ell(M/(x_1,\ldots,x_d)M) < \infty$. Một hệ $(x_1,\ldots,x_r) \subseteq \mathfrak{m}$ với $r \leqslant d$, được gọi là một *phần hệ tham số* của M nếu

$$\dim(M/(x_1,\ldots,x_r)M) = d-r.$$

Một dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là một *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $x_n - x_m \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n, m \geq n_0$. Dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là *dãy không* nếu với mỗi

$k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số n_0 sao cho $x_n \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Cauchy như sau: Hai dãy Cauchy $(x_n), (y_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(x_n - y_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{R}$ là tập các lớp tương đương. Chú ý rằng quy tắc cộng $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ và quy tắc nhân $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ không phụ thuộc vào cách chọn các đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{R}$ và cùng với hai phép toán này, $\widehat{R}$ làm thành một vành Noether địa phương với iđean tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}\widehat{R}$. Vành $\widehat{R}$ vừa xây dựng được gọi là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của R.

Một dãy $(z_n) \subseteq M$ được gọi là *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho $z_n - z_m \in \mathfrak{m}^k M$. Từ khái niệm dãy Cauchy như trên, tương tự ta định nghĩa được khái niệm *môđun đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* trên vành $\widehat{R}$. Môđun này được kí hiệu là $\widehat{M}$.

1.1.13 Ví dụ. Cho K là một trường, $K[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên K. Vành $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ không là vành địa phương. Dễ thấy $P = (x_1, \ldots x_n)S$ là iđêan cực đại của S. Do đó vành địa phương hóa $R = S_P$ là vành địa phương với iđêan tối đại là $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots x_n)R$. Người ta có thể kiểm tra được vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của R chính là $K[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Kết quả sau đây khẳng định rằng chiều của một môđun là không đổi khi chuyển qua đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic (xem [Mat, Định lí 15.1(ii)]).

1.1.14 Bổ đề. $\dim M = \dim(\widehat{M})$.

1.2 Chuẩn bị về dãy chính quy và độ sâu

1.2.1 Định nghĩa. (i) Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_t$ của R được gọi là một *M-dãy chính quy độ dài t* nếu $(x_1, \ldots, x_t)M \neq M$ và x_i không là ước của không đối với môđun thương $M/(x_1, \ldots, x_t)M$ với mọi i.