ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HỒNG MINH

TÔPÔ I-ADIC TRÊN VÀNH NOETHER

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: GS. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 17 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, khoa Sau đại học, khoa Giáo dục Trung học cơ sở - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Mở đầu

Cho R là một vành giao hoán, I là một iđêan của R. Mục đích của luận văn là nghiên cứu tôpô I-adic xác định trên vành R bởi iđêan I. Đặc biệt, chúng tôi xem xét trong trường hợp vành R là Noether địa phương. Các nội dung được trình bày trong luận văn dựa trên cuốn bài giảng của GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường [1] và hai cuốn tài liệu tham khảo chính của các tác giả M. F. Atiyal and I. G. Macdonald [4] và của D. Northcott [3].

Với mục đích tìm hiểu về tôpô I-adic trên vành Noether, đặc biệt là vành Noether địa phương và các tính chất của đầy đủ I-adic. Tôi đã lựa chọn đề tài "***Tôpô I-adic trên vành Noether***" làm luận văn tốt nghiệp thạc sỹ.

Luận văn gồm 2 chương. Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở như định nghĩa và các tính chất về vành và môđun Noether; Giới hạn ngược của hệ các môđun và các tính chất của nó, đặc biệt là tính chất khớp. Định nghĩa và các tính chất về vành và môđun phân bậc được đưa ra ở phần cuối chương. Đây là những công cụ cơ bản nhất cho những nghiên cứu được trình bày trong luận văn.

Chương 2 là chương chính của luận văn. Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tôpô I-adic trên vành Noether. Phần đầu chương trình bày định nghĩa và các tính chất về lọc môđun; Vành phân bậc liên kết và vành Rees; Định lý Artin - Rees và các hệ quả. Phần tiếp theo chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu về tôpô I-adic trên vành Noether. Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng: Đầy đủ I-adic của một vành Noether là Noether. Phần cuối của chương là trình bày về một số tính chất của vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic $\hat{R}$ trên một vành Noether địa phương (R, $\mathfrak{m}$).

Trong quá trình trình bày luận văn, tác giả đã cố gắng chứng minh chi tiết một số vấn đề còn trình bày vắn tắt trong các tài liệu trên. Một số ví dụ và bài tập minh họa cũng được tác giả luận văn đưa vào để làm sáng tỏ cho những nội dung được trình bày.

Vì điều kiện thời gian, năng lực và kinh nghiệm bản thân còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các quý thầy cô và các bạn học viên cùng độc giả quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2011.

Tác giả

TRẦN THỊ HỒNG MINH

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Vành và môđun Noether

Mục này chúng tôi trình bày định nghĩa cùng một số tính chất của vành và môđun Noether. Những vấn đề này là cơ sở để chúng ta nghiên cứu tôpô I - adic trên vành Noether ở mục sau.

Định lý 1.1.1. *Cho M là một R-môđun. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(i) Mọi tập hợp khác rỗng các môđun con của M đều có một phần tử cực đại.

(ii) Mọi dãy tăng các môđun con của M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

đều dừng, nghĩa là tồn tại m để $M_k = M_m, \forall k \geq m$.

(iii) Mọi môđun con của M đều hữu hạn sinh.

Chứng minh. (i)⇒(ii): Lấy tuỳ ý một dãy tăng các R-môđun con của môđun M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ....$$

Gọi F là tập tất cả các phần tử của dãy này. Bởi (i), tập này có phần tử cực đại M_m với m nào đó. Khi đó ta có $M_k = M_m$ với mọi $k \geq m$ hay dãy trên là dừng.

(ii)⇒(iii): Giả sử trái lại, tồn tại một môđun con N của M không hữu hạn sinh. Khi đó trong N tồn tại một dãy vô hạn các phần tử $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ sao cho nếu đặt $M_m = \sum_{i=1}^{m} Rx_i$ thì $M_j \subset M_{j+1}$ với mọi $j \geq 1$. Ta sẽ nhận được một dãy tăng vô hạn mà không dừng

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subset M_n \subseteq ...$$

các môđun con của M, mâu thuẫn với (ii).

(iii)⇒(i): Giả sử S là một tập khác rỗng các môđun con của M. Vì S là một tập khác rỗng, nên ta chọn được một môđun con $M_1 \in S$. Khi đó nếu M_1 không phải là một phần tử cực đại trong S thì sẽ tồn tại M_2 thực sự chứa M_1. Lặp lại luận đó ta suy ra nếu trong S không có phần tử cực đại, thì sẽ tồn tại một dãy tăng vô hạn

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

không dừng các môđun con của M. Dễ thấy rằng khi đó $N = \bigcup_{i \geq 1} M_i$ là một môđun con của M, nên N là một môđun hữu hạn sinh. Giả sử $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là một hệ sinh của N. Vì dãy các môđun nhận được là một dãy tăng nên tồn tại k để $x_1, x_2, ..., x_m \in M_k$. Khi đó

$$N = \sum_{i=1}^{m} Rx_i \subseteq M_k,$$

do vậy $M_k = N$, và như thế thì dãy trên bị dừng bắt đầu tại vị trí thứ k (mâu thuẫn). Vậy trong S phải có một phần tử cực đại. □

Định nghĩa 1.1.2. Cho R là vành giao hoán, có đơn vị. Khi đó, một R-môđun M được gọi là *môđun Noether* nếu nó thoả mãn một trong các điều kiện tương đương trong Định lý 1.1.1. Vành R là một *vành Noether* nếu nó là một R-môđun Noether.

Từ Định nghĩa trên ta dễ dàng có nhận xét sau.

Nhận xét 1.1.3. Vì một tập con khác rỗng của R là một R-môđun con của R-môđun R nếu và chỉ nếu nó là một iđêan của R, nên R là một vành Noether khi và chỉ khi R thoả mãn một trong ba điều kiện tương đương sau đây.

(i) Mọi tập hợp khác rỗng các iđêan của R đều có phần tử cực đại.

(ii) Mọi dãy tăng các iđêan của R

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$$

đều dừng, nghĩa là tồn tại m để $I_k = I_m, \forall k \geq m.$

(iii) Mọi iđêan của R đều hữu hạn sinh.

Ví dụ 1.1.4. (a) Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là vành Noether, vì mọi iđêan của nó đều là iđêan chính nên nó hữu hạn sinh.

Tổng quát, mọi vành chính đều là vành Noether.

(b) Một trường là vành Noether vì nó có hữu hạn iđêan.

(c) Một không gian véctơ là một môđun Noether nếu và chỉ nếu nó hữu hạn chiều.

(d) Vành đa thức vô hạn biến trên vành giao hoán R khác không, $R[x_1, x_2, ...]$ không phải là một vành Noether, vì có dãy tăng vô hạn các iđêan của $R[x_1, x_2, ...]$

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset ... \subset (x_1, x_2, ..., x_n) \subset ....$$

Định lý 1.1.5. *Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và một dãy khớp ngắn các R-môđun*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Khi đó M là môđun Noether nếu và chỉ nếu M' và M'' là các môđun Noether.

Chứng minh. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả thiết thêm rằng M' là một R-môđun con của M và $M'' = M/M'$.

Giả sử M là môđun Noether. Vì mọi xích tăng các môđun con của M' cũng là xích tăng trong M, nên M' là Noether. Cho

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq N_n \subseteq ...$$

là một dãy tăng các môđun con của M''. Khi đó, tồn tại dãy tăng các môđun con

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

của M sao cho $N_n = M_n/M'$, $\forall n$. Suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$ để $M_n = M_k$, $\forall n \geq k$, tức $N_n = N_k$, $\forall n \geq k$ và do đó M'' là Noether.

Ngược lại, cho

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

là một xích tăng tuỳ ý các môđun con của M. Khi đó ta nhận được các xích tăng các môđun con

$$M_1 \cap M' \subseteq M_2 \cap M' \subseteq ... \subseteq M_n \cap M' \subseteq ...$$

của M' và

$$(M_1 + M')/M' \subseteq (M_2 + M')/M' \subseteq ... \subseteq (M_n + M')/M' \subseteq ...$$

của M/M'. Theo giả thiết tồn tại một số tự nhiên k sao cho $M_n \cap M' = M_k + M'$ và $(M_n + M')/M' = (M_k + M')/M'$, $\forall n \geq k$. Từ đây ta dễ dàng suy ra $M_n = M_k$, $\forall n \geq k$, tức M là Noether. □

Sau đây là các hệ quả suy ra trực tiếp từ Định lý 1.1.5.

Hệ quả 1.1.6. *Vành thương của một vành Noether là Noether.*

Hệ quả 1.1.7. *Tổng trực tiếp của một họ hữu hạn các R-môđun Noether là một R-môđun Noether.*

Hệ quả tiếp theo nói lên mối quan hệ giữa môđun hữu hạn sinh và môđun Noether.

Hệ quả 1.1.8. *Mỗi R-môđun hữu hạn sinh trên một vành Noether là một R-môđun Noether.*

Tính Noether của một môđun được bảo tồn qua địa phương hoá, thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.1.9. *Nếu M là một R-môđun Noether và S là tập đóng nhân trong R thì $S^{-1}M$ là một $S^{-1}R$-môđun Noether.*

Trong trường hợp $M = R$, ta có kết quả sau.

Hệ quả 1.1.10. *Nếu R là một vành Noether và S là tập đóng nhân trong R thì $S^{-1}R$ là một vành Noether.*

Sau đây là một kết quả đặc sắc của Hilbert về vành Noether.

Định lý 1.1.11. *(Định lý cơ sở Hilbert) Vành đa thức một biến $R[x]$ lấy hệ tử trên vành Noether R là một vành Noether.*

Chứng minh. Cho R là một vành Noether, để chứng minh $R[x]$ là vành Noether, ta sẽ chỉ ra rằng mọi iđêan khác không của nó là hữu hạn sinh. Cho I là một iđêan khác không tuỳ ý của $R[x]$. Xét tập hợp con của R

$$I_0 = \left\{ a \in R \,\middle|\, \exists f \in I : f = ax^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m \right\}.$$

Nói cách khác I_0 là tập tất cả các hệ số cao nhất của các đa thức thuộc I. Dễ dàng kiểm tra được rằng I_0 là một iđêan của R. Vì R là vành Noether nên I_0 là hữu hạn sinh. Giả sử

$$I_0 = (a_1, ..., a_n)\,,\ a_i \in R,\ i = 1, ..., n.$$