ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐÀM THỊ ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ BIÊN XÁC ĐỊNH NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KÌ DỊ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐÀM THỊ ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ BIÊN XÁC ĐỊNH NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KÌ DỊ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60.46.36**

Người hướng dẫn khoa học:
TS. VŨ VINH QUANG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Các ký hiệu

L	Toán tử elliptic.
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide n chiều.
Ω	Miền giới nội trong không gian $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	Biên trơn Lipschitz.
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục.
$L^2(\Omega)$	Không gian các hàm đo được bình phương khả tích.
$W^{1,p}(\Omega)$	Không gian Sobolev với chỉ số p.
$H^{1/2}(\partial\Omega)$	Không gian Sobolev với chỉ số $1/2$.
$H_0^1(\Omega)$	Không gian các hàm có vết bằng không trên $\partial\Omega$.
$H^{-1}(\partial\Omega)$	Không gian đối ngẫu với $H_0^1(\Omega)$.
$H^{-1/2}(\partial\Omega)$	Không gian đối ngẫu với $H^{1/2}(\partial\Omega)$.
$\\| \,.\, \\|_V$	Chuẩn xác định trên không gian V.
$(.)_V$	Tích vô hướng xác định trên không gian V.
$C_\gamma(\Omega)$	Hằng số vết.
C_Ω	Hằng số Poincare.
E	Ma trận đơn vị.

Mở đầu

Khi mô hình bài toán mô tả các quá trình trong các môi trường liên tục thường dẫn đến các bài toán biên với các loại điều kiện biên khác nhau. Trong trường hợp khi trên một biên chỉ gồm một loại điều kiện biên, ta sẽ gặp bài toán biên hỗn hợp yếu. Đối với bài toán này đã có nhiều công trình nghiên cứu về các phương pháp xác định nghiệm xấp xỉ như phương pháp sai phân, phương pháp phần tử hữu hạn của các tác giả trên thế giới công bố nhiều năm qua. Tuy nhiên trong trường hợp khi trên một đoạn biên gồm hai loại điều kiện biên được phân cách tại một điểm nào đó trên biên, ta sẽ gặp bài toán biên hỗn hợp mạnh hay còn gọi là bài toán biên với điều kiện biên kì dị. Do tính chất thay đổi của điều kiện biên sẽ sinh ra điểm kì dị tại điểm phân chia. Đối với bài toán này, các phương pháp thông thường này sẽ gặp khó khăn. Năm 2006, các tác giả Z. C. Li, Y. L. Chan, G. C. Georgiov, C. Xenophontos khi nghiên cứu về bài toán Motz đã đưa ra các phương pháp xấp xỉ biên đặc biệt thường được gọi là các phương pháp BAMs [1]. Ngoài phương pháp trên việc tìm nghiệm xấp xỉ đối với bài toán với biên kì dị có thể sử dụng các sơ đồ lặp trên cơ sở của phương pháp chia miền [2, 3, 4].

Nội dung chính của luận văn là trình bày cơ sở của phương pháp xấp xỉ biên xác định nghiệm gần đúng của bài toán biên với điều kiện biên kì dị bằng các phương pháp BAMs, đánh giá sai số của các phương pháp tương ứng cùng các kết quả thực nghiệm đối với bài toán Motz, đồng thời đưa ra phương pháp xấp xỉ theo tư tưởng chia miền xác định nghiệm của bài toán Motz tương ứng cũng như trường hợp tổng quát, tiến hành thực nghiệm tính toán, so sánh độ chính xác giữa hai phương pháp xấp xỉ biên theo BAMs và phương pháp chia miền đối với bài toán Motz. Luận văn gồm 3 chương với những nội dung cơ bản như sau:

Chương 1: Luận văn trình bày các kiến thức quan trọng về các không gian hàm và đặc biệt là không gian Sobolev, các bất đẳng thức cơ bản, khái niệm về nghiệm yếu, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, phương pháp biến phân xác định nghiệm yếu thông qua bài toán cực trị phiếm hàm. Đây là các kiến thức quan trọng để trình bày các nội dung trong chương 2 của luận văn.

Chương 2: Luận văn trình bày cơ sở toán học của các phương pháp xấp xỉ biên đặc biệt (các phương pháp BAMs) bao gồm mối quan hệ giữa bài toán Galerkin và bài toán cực trị phiếm hàm, ứng dụng của các phương pháp BAMs đối với các bài toán Motz đồng thời đưa ra các kết quả đánh giá sai số của phương pháp, các kết quả thực nghiệm trong các trường hợp cụ thể. Các kết quả này đã được đưa ra trong tài liệu [1].

Chương 3: Luận văn trình bày phương pháp chia miền giải bài toán biên với điều kiện biên hỗn hợp mạnh, sự hội tụ của phương pháp. Xuất phát từ sơ đồ lặp chia miền tổng quát, luận văn đưa ra kết quả áp dụng thuật toán chia miền giải bài toán Motz, tiến hành tính toán thử nghiệm trên máy tính điện tử để xác định tốc độ hội tụ và độ chính xác của sơ đồ lặp, so sánh kết quả với các phương pháp BAMs do các giả đã đưa ra trong tài liệu [1]. Mở rộng việc áp dụng thuật toán trong trường hợp tổng quát từ đó đưa ra kết luận về tính hữu hiệu của phương pháp chia miền trong việc xác định nghiệm xấp xỉ đối với các bài toán biên với điều kiện biên kì dị. Các kết quả được tính toán số trong luận văn được lập trình trên môi trường Matlab version 7.0 chạy trên máy tính PC.

Mặc dù đã rất cố gắng song nội dung bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn thêm hoàn thiện.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn TS. Vũ Vinh Quang đã tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô, các bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã luôn giúp đỡ, động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

1.1 Các kiến thức cơ bản về các không gian hàm

1.1.1 Không gian $C^k(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ và $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω. Ký hiệu $C^k(\overline{\Omega}), (k = 1, 2, ...)$ là tập các hàm có đạo hàm đến cấp k kể cả k trong Ω, liên tục trong $\overline{\Omega}$. Ta đưa vào $C^k(\overline{\Omega})$ chuẩn

$$\| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|=k} max \mid D^\alpha u(x) \mid, \tag{1.1}$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là vecto với các tọa độ nguyên không âm, $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Sự hội tụ theo chuẩn này là sự hội tụ đều trong $\overline{\Omega}$ của các hàm và tất cả đạo hàm của chúng đến cấp k, kể cả k. Tập $C^k(\overline{\Omega})$ với chuẩn (1.1) là một không gian Banach.

1.1.2 Không gian $L^p(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực dương. Ta ký hiệu $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f xác định trong Ω sao cho

$$\int_\Omega \mid f(x) \mid^p \, dx < \infty. \tag{1.2}$$

Trong $L^p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp trên Ω. Như vậy các phần tử của $L^p(\Omega)$ là các lớp tương đương các hàm đo được thoả mãn (1.2) và hai hàm là tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp trên Ω. Vì

$$| f(x) + g(x) |^p \leq (| f(x) | + | g(x) |)^p \leq 2^p(| f(x) |^p + | g(x) |^p)$$

nên rõ ràng $L^p(\Omega)$ là một không gian vectơ.

Ta đưa vào $L^p(\Omega)$ phiếm hàm $\| . \|_p$ được xác định bởi

$$\| u \|_p = \Big(\int\limits_\Omega | f(x) |^p \ dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Định lí 1.1. *(Bất đẳng thức Höder)* *Nếu $1 < p < \infty$ và $u \in L^p(\Omega), v \in L^p(\Omega)$ thì $uv \in L^p(\Omega)$ và*

$$\int\limits_\Omega | u(x)v(x) | \ dx \leq \| u(x) \|_p . \| v(x) \|_{p'},$$

trong đó $p' = \dfrac{p}{p-1}$, tức là $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, p' được gọi là số mũ liên hợp đối với p.

Định lí 1.2. *(Bất đẳng thức Minkowski)* *Nếu $1 < p < \infty$ thì*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

Định lí 1.3. *Không gian $L^p(\Omega)$ với $1 \leq p < \infty$ là một không gian Banach.*

1.1.3 Không gian $W^{1,p}(\Omega)$

Định nghĩa 1.1. *Cho Ω là miền trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u(x)$ được gọi là khả tích địa phương trong Ω nếu $u(x)$ là một hàm cho trong Ω và với mỗi $x_0 \in \Omega$ đều tồn tại một lân cận ω của x_0 để $u(x)$ khả tích trong Ω.*

Định nghĩa 1.2. *Cho Ω là miền trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $u(x), v(x)$ là hai hàm khả tích địa phương trong Ω sao cho ta có hệ thức*

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \, dx = (-1)^k \int\limits_\Omega v\varphi \, dx$$