ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG NGỌC PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP HALPERN
TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2011

Công trình được hoàn thành tại :

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC – ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học : GS.TS Nguyễn Bường

Phản biện 1 : PGS.TS Đỗ Văn Lưu

Phản biện 2 : TS Nguyễn Thị Thu Thủy

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại :

Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên

Ngày 28 tháng 8 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TS Nguyễn Bường. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô khoa Toán - Tin, phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Khoa Học, Đại Học Thái Nguyên cũng như các Thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2009 - 2011, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục và đào tạo của Nhà trường.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn với các thầy, các cô trong Ban giám hiệu và Tổ Toán - Tin Trường Trung học phổ thông Trại Cau đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn cao học.

Cuối cùng, tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, các anh chị em học viên cao học toán K3 và bạn bè đồng nghiệp đã động viên, khích lệ và cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 5 năm 2011

Tác giả

Dương Ngọc Phương

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay Banach là một vấn đề lớn được rất nhiều các nhà toán học trên thế giới quan tâm.

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu vận dụng phương pháp Halpern tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Bố cục luận văn gồm 02 chương :

Chương I: Các khái niệm cơ bản

Trong chương này giới thiệu một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert, phương pháp lặp Solodov - Svaiter giải phương trình $0 \in Tx$.

Chương II: Phương pháp Halpern và mở rộng

Chương này gồm 3 phần:

+ Phương pháp Halpern tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

+ Phương pháp xấp xỉ mềm.

+ Phương pháp Halpern cải biên.

Do thời gian có hạn nên luận văn mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình làm luận văn cũng như trong quá trình sử lý văn bản chắc chắn không thể tránh khỏi sai sót, Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của Thầy cô và bạn đọc.

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\|\beta\|$	trị tuyệt đối của số thực β
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
I	ánh xạ đồng nhất
$A \subset B$	tập A là tập con thực sự của tập B
$A \subseteq B$	tập A là tập con của tập B
$A \cup B$	A hợp với B
$A \cap B$	A giao với B
$A \times B$	tích Đề-các của hai tập A và B
$\mathrm{conv}D$	bao lồi của tập D
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A

Chương 1
Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này, chúng tôi đề cập đến các vấn đề sau. Trong mục 1.1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kiến thức liên quan đến không gian Hilbert. Trong mục 1.2, chúng tôi trình bày một số tính chất của toán tử. Mục 1.3 được dùng để trình bày bài toán tìm điểm bất động. Mục 1.4 được dùng để trình bày phương pháp lặp Solodov-Svaiter giải phương trình $0 \in Tx$.

1.1. Một số khái niệm của không gian Hilbert

Các khái niệm và kết quả trong phần này được tham khảo trong tài liệu [1] và [2].

1.1.1. **Định nghĩa không gian Hilbert**

Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x, x\rangle > 0,\ \forall x \neq 0;\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall x, y \in X;$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$

iv) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\ \forall x, y, z \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert. Chuẩn của phần tử x được kí hiệu là $\|x\|$ và được xác định bằng $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Các không gian $\mathbb{R}^n$, $L^2[a, b]$ là các không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng là:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i; \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n; y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx,\ \varphi,\ \psi \in L^2[a, b].$$

1.1.2. **Một số khái niệm cơ bản**

• Cho X là một không gian Hilbert, một dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in X$ gọi là hội tụ mạnh tới phần tử của $x \in X$ nếu $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Nếu $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $x \in X$ thì:

(i) Mỗi dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ cũng hội tụ tới x;

(ii) Mỗi dãy $\{\|x_n - \xi\|\}$ bị chặn, $\xi \in X$.

• Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là đủ hay Cauchy, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0(\varepsilon)$ sao cho: $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ với mọi $m \geq n_0(\varepsilon),\ n \geq n_0(\varepsilon)$.

• Toán tử $A : X \to \mathbb{R}$ được gọi là tuyến tính nếu:

(i) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2\ \forall x_1, x_2 \in X$;

(ii)$A(\alpha x) = \alpha Ax, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X$.

• Toán tử tuyến tính A được gọi là bị chặn, nếu tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho $\|Ax\| \leq M\|x\|$. Giá trị hằng số M nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức đó được gọi là chuẩn của A và ký hiệu là $\|A\|$.

Mệnh đề 1.1. *Cho X là một không gian Hilbert và $x_0 \in X$ là một phần tử tùy ý. Khi đó tồn tại một hàm tuyến tính $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sao cho $\|\varphi\| = 1$ và $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

• Tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X gọi là không gian liên hợp (hay không gian đối ngẫu của X) và được ký hiệu là X^*.

• Dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in X$ được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in X$ (viết tắt là $x_n \rightharpoonup x$) nếu $\langle \phi, x_n\rangle \to \langle \phi, x\rangle$ với mỗi $\phi \in X^*$.

• Cho X là không gian Hilbert, và C là tập con của X. Một ánh xạ $T : C \to X$ được gọi là *d-compact*, nếu nó thỏa mãn tính chất với mỗi dãy $\{x_n\}$ bị chặn trong X và $\{Tx_n - x_n\}$ hội tụ mạnh thì tồn tại một dãy con

$\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ cũng hội tụ mạnh.

• T được gọi là *d- đóng* tại điểm p nếu $\{x_n\} \in D(T)$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $x \in D(T)$ và $\{T(x_n)\}$ hội tụ mạnh đến p thì $T(x) = p$.

Định nghĩa 1.1 Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $x \in X$ thì dãy $\{\|x_n\|\}$ là bị chặn.

• Cho X là một không gian Hilbert, M là một tập con khác rỗng của X.

(i) M được gọi là lồi nếu với mọi $x, y \in M,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ ta có:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M;$$

(ii) M được gọi là compact nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ đều chứa dãy con hội tụ tới một điểm thuộc M.

• Mỗi tập con đóng bị chặn M của một không gian Hilbert là compact yếu, tức là với mỗi dãy bị chặn trong M có thể trích ra được một dãy con hội tụ yếu tới một phần tử của không gian này.

• Tập $M \subset X$ được gọi là tập đóng yếu, nếu $\{x_n\} \rightharpoonup x$, thì $x \in M$.

Định lý 1.1. (Mazur)

Mỗi tập con lồi đóng của một không gian Hilbert là đóng yếu.

Định nghĩa 1.2. Một phiếm hàm φ xác định trên X được gọi là lồi, nếu

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y)$$

với mọi $x, y \in X,\ t \in [0, 1]$. Nếu dấu "=" xảy ra chỉ khi $x = y$, thì φ được gọi là lồi chặt.

• Nếu tồn tại một hàm liên tục tăng $\gamma : [0; +\infty) \to R,\ \gamma(0) = 0$ sao cho:

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) - t(1 - t)\gamma(\|x - y\|)$$

với mọi $x, y \in X$ thì φ được gọi là lồi đều và hàm $\gamma(t)$ gọi là modul lồi của φ.

• Nếu $\gamma(t) = ct^2\ \ (c > 0)$ thì phiếm hàm φ được gọi là lồi mạnh.

Định nghĩa 1.3. Một phiếm hàm φ được gọi là nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $x_n \to x_0$ ta có:

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Nếu $x_n \rightharpoonup x_0$ và

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n),$$

thì φ được gọi là nửa liên tục yếu tại x_0.

Định lý 1.2. *Cho một phiếm hàm $\varphi : X \to R$. Ta nói rằng φ khả vi theo hướng h tại một điểm $x \in X$ nếu giới hạn*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} = V'(x,h). \tag{1.1}$$

Nếu giới hạn trong (1.1) tuyến tính liên tục theo h, tức là $V'(x,h) = A(x)h$ thì $A(x)$ được gọi là vi phân Gâteaux của φ tại điểm x và được kí hiệu là $\varphi'(x)$.

Trong định nghĩa (1.1) nếu tồn tại toán tử $A : X \to X^*$ sao cho:

$$V'(x,h) = \langle Ax, h\rangle, \forall x, h \in X,$$

thì toán tử A được gọi là Gradient của hàm φ và ký hiệu φ' hay $grad\varphi$.

Định lý 1.3.

(i) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi trên X thì $\varphi'(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in X;$$

(ii) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi đều trên X thì:

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y\rangle \geq 2\gamma(\|x - y\|),\ \forall x, y \in X;$$

(iii) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi mạnh trên X thì:

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y\rangle \geq 2c\|x - y\|^2,\ \forall x, y \in X.$$

Định lý 1.4.

(i) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi trên X thì $\varphi'(x)$ thỏa mãn bất đẳng