

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THỊ YẾN

**TÍNH TỰA CHUẨN TẮC, TÍNH GIẢ CHUẨN TẮC
VÀ QUY TẮC NHÂN TỬ LAGRANGE**

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

MÃ SỐ: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN - 2011

Mục lục

Mục lục	ii
Mở đầu	1
1 ĐIỀU KIỆN CẦN FRITZ JOHN	4
1.1 KẾT QUẢ BỔ TRỢ	4
1.2 ĐIỀU KIỆN CẦN FRITZ JOHN	10
1.3 NHÂN TỬ LAGRANGE CÓ THÔNG TIN VÀ NHÂN TỬ LAGRANGE MẠNH	17
2 TÍNH TỰA CHUẨN TẮC, TÍNH GIẢ CHUẨN TẮC VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY	29
2.1 TÍNH TỰA CHUẨN TẮC VÀ TÍNH GIẢ CHUẨN TẮC .	29
2.2 ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO TÍNH GIẢ CHUẨN TẮC	35
2.3 ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO TÍNH TỰA CHUẨN TẮC	38
3 HÀM PHẠT CHÍNH XÁC	43
3.1 TÍNH GIẢ CHUẨN TẮC VÀ HÀM PHẠT CHÍNH XÁC	43
3.2 BIỂU DIỄN MỞ RỘNG CỦA TẬP RÀNG BUỘC . . .	49

3.3	CÁC VÍ DỤ	50
	Kết luận	56
	Tài liệu tham khảo	57

Mở đầu

Lí thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lí thuyết các bài toán cực trị. Các quy tắc nhân tử Lagrange đã và đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả.

Thông thường người ta thiết lập các điều kiện cần tối ưu kiểu Fritz John và từ đó dẫn các điều kiện cần tối ưu kiểu Kuhn-Tucker với các điều kiện chính quy khác nhau. Các điều kiện cần tối ưu có thể dẫn bằng cách thiết lập các định lí luân phiên làm công cụ trên cơ sở sử dụng các định lí tách các tập lồi hoặc bằng phương pháp hàm phạt chính xác. Các nhân tử Lagrange với một vài tính chất phụ sẽ hữu ích trong nghiên cứu tính chất của nghiệm tối ưu.

Năm 2002, D. P. Bertsekas và A. E. Ozdaglar [3] đã thiết lập quy tắc nhân tử Lagrange kiểu Fritz John, trong đó các nhân tử Lagrange có thêm một tính chất phụ (tính chất (CV)). Ba loại nhân tử Lagrange được nghiên cứu bao gồm các vectơ nhân tử Lagrange có thông tin, mạnh và tối thiểu. Các điều kiện chính quy tổng quát về tính tựa chuẩn tắc và tính giả chuẩn tắc của điểm chấp nhận được được đưa vào để đảm bảo sự khác 0 của nhân tử Lagrange ứng với hàm mục tiêu. Việc tiếp cận bằng phương pháp hàm phạt chính xác tỏ ra hiệu quả dưới các điều kiện về tính tựa chuẩn tắc và

tính giả chuẩn tắc.

Luận văn trình bày các kết quả của Bertsekas và Ozdaglar [3] về lý thuyết các nhân tử Lagrange của bài toán tối ưu có các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập với các điều kiện chính quy tổng quát về tính tựa chuẩn tắc và tính giả chuẩn tắc của nghiệm tối ưu.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày điều kiện cần kiểu Fritz John với các nhân tử Lagrange có thêm tính chất (CV). Ba loại vectơ nhân tử Lagrange được nghiên cứu bao gồm các vectơ nhân tử Lagrange có thông tin, mạnh và tối thiểu. Mối quan hệ giữa các loại vectơ nhân tử Lagrange này được trình bày cho trường hợp nón tiếp tuyến lồi.

Chương 2 trình bày các điều kiện chính quy tổng quát đảm bảo nhân tử Lagrange ứng với hàm mục tiêu khác 0. Đó là các điều kiện chính quy về tính tựa chuẩn tắc và tính giả chuẩn tắc của nghiệm. Chú ý rằng điều kiện giả chuẩn tắc mạnh hơn điều kiện tựa chuẩn tắc. Một trong các điều kiện chính quy (CQ1) -(CQ6) đúng thì điều kiện giả chuẩn tắc đúng.

Chương 3 trình bày cách tiếp cận bằng phương pháp hàm phạt chính xác. Kết quả chỉ ra rằng điều kiện giả chuẩn tắc kéo theo sự thừa nhận một hàm phạt chính xác. Trong trường hợp nón pháp tuyến lồi thì điều kiện tựa chuẩn tắc cũng kéo theo sự thừa nhận một hàm phạt chính xác. Nếu tập ràng buộc là chính quy thì việc thừa nhận một hàm phạt chính xác kéo theo sự thừa nhận các nhân tử Lagrange.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS

Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa toán, Phòng đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K3 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2011

Dương thị Yến

Chương 1

ĐIỀU KIỆN CẦN FRITZ JOHN

Chương 1 trình bày điều kiện cần Fritz John với các nhân tử Lagrange có thêm tính chất (CV). Các vectơ nhân tử Lagrange có thông tin, mạnh và tối thiểu được trình bày cùng với mối quan hệ của chúng. Các kết quả trong chương này là của Bertsekas-Ozdaglar [3].

1.1 KẾT QUẢ BỔ TRỢ

Xét bài toán tối ưu có dạng

$$\min_{x \in C} f(x), \quad (1.1)$$

trong đó, tập ràng buộc C bao gồm các ràng buộc đẳng thức, ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập trù tượng.

$$C = X \cap \{x | h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\} \cap \{x | g_1(x) \leq 0, \dots, g_r(x) \leq 0\} \quad (1.2)$$

Giả sử f, h_i, g_j là các hàm trơn (khả vi liên tục) từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$; X là tập đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Tất cả các vectơ được xem như các vectơ cột, dấu " ' " kí hiệu phép chuyển vị, $x'y$ là kí hiệu tích vô hướng của hai vectơ

x và y . Ta dùng chuẩn Euclide

$$\|x\| = (x'x)^{\frac{1}{2}}.$$

Nhắc lại: Vectơ y là tiếp tuyến của tập $S \subset \mathbb{R}^n$ tại $x \in S$ nếu $y = 0$ hoặc tồn tại một dãy con $\{x^k\} \subset S$ sao cho $x^k \neq x$ với mọi k và

$$x^k \rightarrow x, \quad \frac{(x^k - x)}{\|x^k - x\|} \rightarrow \frac{y}{\|y\|}.$$

Một cách tương đương là: Tồn tại dãy con $\{x^k\} \subset S$, với $x^k \rightarrow x$ và dãy số dương $\{\alpha^k\}$ sao cho $\alpha^k \rightarrow 0$ và $\frac{x^k - x}{\alpha^k} \rightarrow y$.

Tập hợp tất cả các tiếp tuyến của S tại x được kí hiệu là $T_S(x)$ và được gọi là nón tiếp tuyến của S tại x .

Nón cực của nón T được xác định bởi

$$T^* = \{z | z'y \leq 0, \quad y \in T\}.$$

Với nón $T \neq \emptyset$, ta luôn có $T \subset (T^*)^*$. Dấu "=" xảy ra nếu T là tập lồi đóng.

Với tập X đóng và điểm $x \in X$, ta kí hiệu nón pháp tuyến của X tại x là $N_X(x)$, $N_X(x)$ nhận được từ $T_X(x)^*$ qua một phép lấy bao đóng: $z \in N_X(x)$ nếu tồn tại dãy con $\{x^k\} \subset X$ và $\{z^k\}$ sao cho $x^k \rightarrow x$, $z^k \rightarrow z$ và $z^k \in T_X(x^k)^*$ với mọi k . Một cách tương đương, đồ thị của $N_X(\cdot)$, mà ta xem như một ánh xạ đa trị $\{(x, z) | z \in N_X(x)\}$, là bao đóng của đồ thị của $T_X(\cdot)^*$. Nói chung, ta có $T_X(x)^* \subset N_X(x)$, với bất kỳ $x \in X$.

Tuy nhiên, $N_X(x)$ có thể không bằng $T_X(x)^*$, và có thể không lồi. Khi $T_X(x)^* = N_X(x)$, ta nói X là chính quy tại x . Hai tính chất quan trọng của tính chính quy là (xem [10]):

- (i) Nếu X là lồi thì chính quy tại mỗi $x \in X$;

(ii) Nếu X là chính quy tại x nào đó $\in X$ thì $T_X(x)$ là lồi.

Một điều kiện cần cổ điển để vectơ $x^* \in C$ là cực tiểu địa phương của f trên C là:

$$\nabla f(x^*)'y \geq 0, \quad \forall y \in T_C(x^*), \quad (1.3)$$

trong đó $T_C(x^*)$ là nón tiếp tuyến của C tại x^* .

Trong trường hợp C được biểu diễn bởi các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức ta nhận được các nhân tử Lagrange.

Ta nói rằng tập ràng buộc C (1.2) nhận các nhân tử Lagrange tại điểm $x^* \in C$ nếu với mọi hàm mục tiêu trơn f mà x^* là cực tiểu địa phương của bài toán (1.1), tồn tại các vectơ $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ và $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_r^*)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla g_j(x^*)]'y \geq 0, \quad \forall y \in T_X(x^*), \quad (1.4)$$

$$\mu_j^* \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, r. \quad (1.5)$$

$$\mu_j^* = 0, \quad \forall j \notin A(x^*), \quad (1.6)$$

trong đó

$$A(x^*) = \{j | g_j(x^*) = 0\}$$

là tập các chỉ số ràng buộc bất đẳng thức tích cực tại x^* .

Điều kiện (1.6) gọi là điều kiện bù (gọi tắt là (CS)). Cặp (λ^*, μ^*) thỏa mãn (1.4) - (1.6) gọi là vectơ nhân tử Lagrange tương ứng với f và x^* . Tập hợp các vectơ nhân tử Lagrange tương ứng với f và x^* là tập đóng và lồi (có thể là tập rỗng). Điều kiện (1.4) tương thích với tính chất đặc trưng cổ điển của nhân tử Lagrange: biểu hiện ở tính dừng của hàm Lagrange

tại x^* . Khi X là tập lồi, (1.4) tương đương với

$$[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla g_j(x^*)]'(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (1.7)$$

Bởi vì khi X là lồi, $T_X(x^*)$ là bao đóng của tập các phương chấp nhận được $F_X(x^*)$, các vectơ đó có dạng $\alpha(x - x^*)$ với $\alpha > 0$ và $x \in X$.

Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì (1.7) có dạng

$$[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla g_j(x^*)] = 0,$$

với điều kiện (1.5) và (1.6).

Khi $X = \mathbb{R}^n$, với hàm trơn f mà x^* là cực tiểu địa phương của nó, tồn tại nhân tử Lagrange khi và chỉ khi

$$\nabla f(x^*)'y \geq 0, \quad \forall y \in V(x^*),$$

trong đó $V(x^*)$ là nón các biến phân chấp nhận được cấp một tại x^* , được cho bởi

$$V(x^*) = \{y \mid \nabla h_i(x^*)'y = 0, i = 1, \dots, m, \nabla g_j(x^*)'y \leq 0, j \in A(x^*)\}.$$

Từ đó suy ra tập ràng buộc thừa nhận nhân tử Lagrange tại x^* nếu $T_C(x^*) = V(x^*)$. Trong trường hợp này ta nói rằng x^* là tựa chính quy hay tính tựa chính quy đúng tại x^* . Bởi vì tính tựa chính quy là trừu tượng, cho nên ta cho các điều kiện thừa nhận các nhân tử Lagrange dễ kiểm chứng hơn. Các điều kiện như vậy được gọi là các điều kiện chính quy. Một số điều kiện chính quy thường dùng:

(CQ1) $X = \mathbb{R}^n$ và x^* là điểm chính quy theo nghĩa là gradients của ràng buộc bất đẳng thức $\nabla h_i(x^*)$, $i = 1, \dots, m$ và gradients của ràng buộc bất đẳng thức tích cực $\nabla g_j(x^*)$, $j \in A(x^*)$, là độc lập tuyến tính.