ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HỮU PHÚC

NHỮNG THÀNH TỰU TRONG LỊCH SỬ GIẢI PHƯƠNG TRÌNHĐẠI SỐ

Chuyên ngành:PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS LÊ THỊ THANHNHÀN

Thái Nguyên – 2011

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS. TS Lê Thị Thanh Nhàn, người đã trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn và tạo mọi điều kiện giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu và Phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và các thầy, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại Trường.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến cha mẹ, người thân, bạn bè và tất cả những người đã giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

MỞ ĐẦU

Lý thuyết giải phương trình đại số có lịch sử từ rất lâu đời. Từ trước công nguyên, cách giải phương trình đa thức bậc 2 đã được biết đến trong các nền toán học cổ của người Ai Cập, người Babylon, người Hy Lạp. Đến thế kỷ 16, loài người đã đạt được những thành tựu lớn trong lịch sử giải phương trình đa thức bởi những đóng góp của các nhà toán học La Mã như Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Ludovico Ferrari (1525-1565). Những nhà toán học này đã tìm ra lời giải phương trình đa thức bậc $3, 4$ bằng căn thức, tức là đưa ra công thức tính nghiệm theo các hệ số của đa thức thông qua các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, khai căn. Đầu thế kỉ 19, Ruffini (1765-1822) một nhà toán học,vật lí người Ý, đã chứng minh tính không giải được bằng căn thức của một phương trình bậc lớn hơn 4, nhưng vẫn còn lỗ hổng trong chứng minh này. Độc lập với Ruffini, nhà toán học người Nauy, Niels Henrik Abel (1802-1829), đã chỉ ra rằng không thể giải được phương trình tổng quát bậc lớn hơn 4 bằng căn thức. Thừa hưởng những thành tựu của Abel, nhà toán học Pháp thiên tài Evariste Galois (1811-1832) đã để lại cho thế giới toán học một trong những lý thuyết đẹp đẽ nhất, trong đó có lời giải hoàn hảo cho bài toán nổi tiếng về tính giải được bằng căn thức của phương trình đa thức.

Mục đích của luận văn là trình bày những thành tựu trong lịch sử giải phương trình đa thức. Tài liệu tham khảo chủ yếu là 2 cuốn sách "Galois Theory" của J. P. Escofier (Springer, 2004) và của J. Rotman (Springer, 2001). Chúng tôi cho rằng, luận văn này đã phác họa khá chi tiết về lịch sử giải phương trình đa thức, trong đó chứa đựng những thông tin quan trọng không thể tìm thấy ở bất cứ tài liệu tiếng Việt nào.

Luận văn gồm 3 chương. Chương 1 đề cập đến một số vấn đề về nghiệm của phương trình như: xấp xỉ nghiệm, liên hệ với hình học và lượng giác, khó khăn về kí hiệu và thuật ngữ, sự tồn tại nghiệm và sơ lược tiến trình giải phương trình đại số. Chương 2 trình bày lịch sử giải phương trình bậc 2, 3, 4 của người Babylon, người Ả Rập, người Ấn Độ, người Hy Lạp, của các nhà toán học Omar Khayyam, Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Descartes và những đóng góp của Raffaele Bombeli vào các tính toán với số phức. Chương 3 trình bày các kiến thức về mở rộng trường, mở rộng căn, nhóm giải được, nhóm Galois, khái niệm đa thức giải được bằng căn thức và chứng minh tính giải được bằng căn thức của các phương trình bậc 1, 2, 3, 4. Phần tiếp theo của Chương 3 trình bày Định lý lớn của Galois, cho sự tương đương giữa tính giải được bằng căn thức của một đa thức, tính giải được của nhóm Galois của nó, và điều kiện để trường phân rã chứa trong một mở rộng căn. Đây là một trong những kết quả hoàn hảo và trọn vẹn nhất cho bài toán giải phương trình đại số. Phần cuối Chương 3 là những áp dụng của Định lí lớn của Galois để chứng minh một số phương trình bậc 5 cụ thể không giải được bằng căn thức.

Chương 1

Một số vấn đề trong lịch sử giải phương trình đa thức

1.1 Một số vấn đề về nghiệm của phương trình

1.1.1. Vấn đề xấp xỉ nghiệm

Khoảng những năm 1600 trước công nguyên, người Babylon đã có thể đưa ra giá trị xấp xỉ cực kì chính xác cho các căn bậc hai. Chẳng hạn, họ đã tính được giá trị xấp xỉ của $\sqrt{2}$ với một sai số chỉ là 10^{-6}. Trong hệ thống ghi cơ số 60, số này được viết 1.24.51.10, nghĩa là $\sqrt{2}$ được xấp xỉ bởi giá trị

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296...$$

Sau đó, vào khoảng năm 200 sau công nguyên, Heron (nhà toán học Hy Lạp) đã tóm lược phương pháp xấp xỉ căn bậc hai bằng việc dùng dãy $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

Chúng ta không thể trình bày ở đây một cách đầy đủ quá trình xấp xỉ nghiệm của đa thức phát triển bởi các nhà toán học Trung Quốc và Ả Rập. Người Trung Quốc đã có thể tính được giá trị xấp xỉ của căn bậc ba từ những năm 50 trước công nguyên. Còn phương pháp tuyến tính hoá phát triển bởi Isaac Newton (1642-1727) bằng việc dùng dãy $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ đã được biết đến bởi Sharaf ad Din (sinh năm 1201), một nhà toán học người Ả Rập.

Năm 1225, Leonard Pisa đã đưa ra giá trị xấp xỉ cho nghiệm dương của phương trình $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ trong hệ thống ghi cơ số 60 là 1.22.7.42.33.40. Sai số của giá trị xấp xỉ này chỉ là 10^{-10}, cho đến nay chúng ta vẫn không biết tại sao ông lại có thể làm được điều phi thường như vậy.

1.1.2. Liên hệ với hình học và lượng giác

Người Hy Lạp cổ đã có thể dựng hình các nghiệm dương của phương trình bậc hai bằng cách coi nó là giao của các đường thẳng và các đường tròn, nhưng họ đã không thiết lập được công thức nghiệm theo nghĩa đại số cho bài toán này. Đối với phương trình bậc ba, người ta đã dùng các đường conic (chẳng hạn như cách mà Omar Khayyam - nhà toán học Iran đã làm khoảng những năm 1100), nhưng có lẽ phương pháp này đã được Archimedes biết đến (khoảng năm 287-212 trước công nguyên).

Trong cuốn sách *Hình học* của René Descartes (1596-1650) - nhà toán học Pháp, ông đã cho những mối liên hệ giữa các nghiệm của phương trình đại số với các giao điểm của các đường cong đại số. Phát hiện này của ông là một trong những xuất phát điểm quan trọng nhất của Hình học Đại số.

Đối với bài toán chia đường tròn thành n phần bằng nhau - một chủ đề lớn được quan tâm nghiên cứu, người Ả Rập đã phát hiện ra rằng việc dựng một đa giác đều 9 cạnh có mối quan hệ với việc giải một phương trình bậc 3. Sau đó Francois Viète (1540-1603) - nhà toán học Pháp đã miêu tả mối quan hệ giữa bài toán chia ba một góc và nghiệm của một phương trình bậc ba. Viète cũng đưa ra biểu diễn của $\sin n\varphi$ và $\cos n\varphi$ như các hàm của $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$. Năm 1837, Laurent Wantzel (1814-1848) - một nhà toán học Pháp đã chỉ ra rằng không thể chia 3 một góc bất kì bằng thước kẻ và compa (bài toán này được đặt ra bởi người Hy Lạp). Carl Friedrich Gauss (1777-1855) đã đưa ra lời giải đại số cho bài toán chia đường tròn thành p phần bằng nhau với p là một số nguyên tố Fermat. Các kết quả này của ông đã được trình bày trong Chương 7 của cuốn sách *Disquisitiones arithmetiae* xuất bản năm 1801, trong đó có chứa những ý tưởng liên quan đến những thành tựu sau này của Niels Henrik Abel và Evariste Galois.

1.1.3. Những khó khăn về kí hiệu và thuật ngữ

Trước thế kỷ 17, toán học thường không sử dụng bất cứ một ký hiệu đặc biệt nào, điều này gây khó khăn cho sự phát triển những phương pháp đại số. Ký hiệu hiện đại ít nhiều được phát triển bởi René Descartes, người đã dụng chúng trong cuốn sách Hình học của mình.

Trong cuốn *Zététiques* của Viète xuất bản năm 1591, từ tiếng Hy Lạp $\varsigma\eta\tau\varepsilon\iota\nu$ có nghĩa là "nghiên cứu", biểu thức

$$\frac{F.H + F.B}{D + F} = E$$

đã được ông viết là:

$$\left\{\begin{array}{c} F \quad in \quad H \\ +F \quad in \quad B \\ \hline D \; + \; F \end{array}\right\} æquabitur \quad E.$$

Viète đã dùng kí hiệu rất phức tạp cho lũy thừa của ẩn số: ông viết "A quadratum" cho A^2, "A cubus" cho A^3, "A quadrato-quadratum" cho A^4 và "A protestas", "A planum" cho A^m, A^n. Để chỉ bậc của hệ số F, ông viết "F planum" cho F là hệ số của lũy thừa bậc 2, "F solidum" cho F là hệ số của lũy thừa bậc 3 v.v. Chẳng hạn, cho phương trình bậc hai tổng quát ẩn A, giả sử giữa biến số A và các hệ số B, C, D có sự đồng nhất về bậc, Viète đã viết :

"B in A quadratum plus D plano in A æquari Z solido."

có nghĩa là $BA^2 + DA = Z$. Đóng góp lớn nhất của Viète là tạo ra một hệ thống tính toán với các chữ cái được dùng để biểu thị cho các đại lượng đã biết hoặc các ẩn số cần tìm. Ý tưởng này tạo ra sự chuyển biến sâu sắc trong phương pháp và quan niệm của đại số; thay vì chỉ làm việc trên các ví dụ bằng số, người ta có thể xem xét các trường hợp tổng quát. Chắc chắn, các chữ cái đã được sử dụng trước Viète, nhưng nó không biểu thị bản chất các tính toán: chẳng hạn, họ dùng chữ cái a để biểu thị cho đại lượng này, nhưng lại dùng các chữ cái khác để biểu thị giá trị bình phương, lũy thừa 3 và các lũy thừa tiếp theo của a, lẽ ra họ phải sử dụng các kí hiệu liên quan đến a để biểu thị chúng.

Các số thập phân được giới thiệu bởi Al Uqlidisi, một nhà toán học Ả Rập, trong cuốn *Hình học Euclid* khoảng vào năm 950. Số thập phân cũng được biết thông qua các công việc của Al Kashi (khoảng 1380- 1429) năm 1427, Viète năm 1579, Simon Stevin (1548- 1620) năm 1585. Việc sử dụng một dấu chấm để cách li phần nguyên với phần thập phân của một số thập phân đã được phổ biến bởi John Neper (1550-1617), nhưng người Pháp lại dùng dấu phẩy thay cho dấu chấm. Tuy vậy, một thời gian dài sau khi đã giới thiệu cách dùng dấu chấm để viết các số thập phân, người ta vẫn viết số thập phân dưới dạng một số nguyên theo sau là một phân số, chẳng hạn số $11,224176$ được viết là $11\frac{224176}{1000000}$.

Dấu $+$ và $-$ đã được sử dụng vào khoảng năm 1480, nhưng mãi đến đầu thế kỷ 17 mới được dùng phổ biến. Phép nhân đã được Michael Stifel (1486-1567) viết là M (1545)và Viète (1591) viết là *in*. Với ký hiệu phép nhân hiện nay, dấu $\times$ được giới thiệu bởi William Oughtred (1574- 1660) năm 1637 và dấu chấm được giới thiệu bởi Wilhelm Leibniz (1646- 1716) năm 1698.

Đối với các lũy thừa, năm 1484 Nicolas Chuquet (1445- 1500) đã viết biểu thức $1,225 + 148x^2$ là $1,225\tilde{p}148^2$, Raffaele Bombeli (1572) đã viết biểu thức $3x^2$ là $3\underset{\smile}{2}$. Các kí hiệu $x^2, x^3, \ldots$ cho các luỹ thừa của x mà chúng ta dùng ngày nay được giới thiệu bởi Descartes. Trong thế kỷ 18, người ta viết bb cho b^2, nhưng lại viết các luỹ thừa cao hơn của b là b^3, b^4 v.v.

Sau khi các kí hiệu liên quan đến luỹ thừa của ẩn số và các phép toán đối với các hệ số được hoàn thiện, việc tính toán với đa thức được hình thành một cách rõ ràng. Descartes chỉ ra rằng một đa thức triệt tiêu tại giá trị a nếu và chỉ nếu nó chia hết cho $X - a$. Dấu = do Michel Recorde (1510-1558) sử dụng năm 1557 được thay cho kí hiệu mà trước đó Descartes đã dùng. Albert Girard (1596-1632) đã giới thiệu kí hiệu $\sqrt[3]{A}$. Chỉ số dưới được Gabriel Cramer (1704 - 1752) dùng năm 1750 để viết các công thức nổi tiếng của ông, chỉ số trên $', '', ''', ^{iv}, ^{v}, \cdots$ cũng xuất hiện rộng rãi vào thời gian đó. Kí hiệu $\sum$ được giới thiệu bởi Leonhard Euler (1707-1783) v.v. Các ký hiệu này được chấp nhận rộng rãi trên toàn thế giới cho đến ngày nay.

1.1.4. Sự tồn tại nghiệm của phương trình

Al Khwarizmi (780- 850) dường như là người đầu tiên, vào khoảng năm 830, chỉ ra sự tồn tại phương trình bậc hai có hai nghiệm dương. Trường hợp nghiệm âm chỉ được nghiên cứu vào cuối thế kỷ 16. Girard là người đầu tiên khẳng định rằng một phương trình bậc n có n nghiệm. Ông không đưa ra bất kỳ chứng minh nào cho khẳng định này và ý tưởng của ông về bản chất của các nghiệm có vẻ lờ mờ. Tuy nhiên, ông đã nghĩ về các nghiệm giống như những số phức hoặc các số tương tự. Vì thế sự không rõ ràng này cũng không gây cản trở ông đổi mới việc tính toán với các nghiệm như là tính toán với các con số. Tất cả các nhà toán học đều đánh giá cao công lao này của ông.

Descartes không biết chính xác số nghiệm của đa thức, nhưng ông đã biết được số nghiệm không vượt quá bậc của đa thức. Leibniz cũng không cảm nhận được bản chất của các nghiệm, năm 1702 ông vẫn không thấy được rằng $\sqrt{\sqrt{-1}}$ là một số phức. Nhưng các phương pháp lấy tích phân của các hàm hữu tỷ được phát triển bởi Leibniz và Jean Bernuolli (1667-1748) vào khoảng thời gian này đã mở đường cho Leonhard Euler (1707- 1783) chứng minh Định lí vào năm 1749: Đa thức bậc n với hệ số thực luôn có n nghiệm phức. Định lý này thường được gọi là "Định lý cơ bản của đại số". Jean d'Alembert (1717- 1783) đã đưa ra một chứng minh thú vị nhưng chưa đầy đủ cho định lí này vào năm 1746, vì thế người Pháp gọi nó là "Định lý d'Alembert". Trong khóa học của mình tại Trường Đại học *Ecole Normale* vào năm thứ 3 của Cách mạng Pháp, Pierre Simon de Laplace (1749- 1827) đã chứng minh rằng luôn tồn tại nghiệm của đa thức ở đâu đó. Gauss đã đưa