ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN QUANG NGỌC

CẤU TRÚC TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN AFFINE

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: 60. 46. 36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2011

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU

Bản thân bất đẳng thức biến phân là một đối tượng toán học được nghiên cứu độc lập. Hơn nữa, bất đẳng thức biến phân còn chứa đựng trong nó hoặc có liên quan đến rất nhiều bài toán khác của toán học và của thực tế (bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán cân bằng, hệ phương trình suy rộng,...), vì vậy nó thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới cũng như ở Việt Nam trong mấy chục năm qua. Một trong những vấn đề cần trả lời khi nghiên cứu bất đẳng thức biến phân là vấn đề về sự tồn tại nghiệm và các tính chất của tập nghiệm (tính đóng, tính compact, tính liên thông, tính co rút, tính ổn định của tập nghiệm theo tham số,...).

Một trong những lớp bài toán bất đẳng thức biến phân được nghiên cứu nhiều nhất là lớp bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Tuy là lớp bài toán bất đẳng thức biến phân đơn giản nhất, nhưng bất đẳng thức biến phân affine là một trong những lớp bài toán có cấu trúc đặc thù và chứa một số lớp bài toán quan trọng (tối ưu véc tơ hàm phân thức tuyến tính, tối ưu hàm toàn phương,...). Nghiên cứu bất đẳng thức biến phân affine cũng làm sáng tỏ nhiều vấn đề của bất đẳng thức biến phân tổng quát.

Luận văn này cố gắng trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến sự tồn tại và tính chất tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân, đặc biệt là bất đẳng thức biến phân affine.

Luận văn gồm hai Chương.

Mục 1 của Chương 1 trình bày bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan.

Mục 2 của Chương 1 trình bày sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Mục 3 của Chương 1 trình bày bài toán bất đẳng thức biến phân véctơ.

Mục 4 của Chương 1trình bày tính liên thông của tập nghiệm trong bài toán bất đẳng thức biến phân véctơ.

Chương 2 trình bày hai lớp bất đẳng thức biến phân affine cụ thể.

Mục 1 Trình bày định nghĩa và một số định lý về bài toán bất đẳng thức biến phân affine,véctơ affine,véctơ affine yếu và bất đẳng thức biến phân affine phụ thuộc tham số

Mục 2 Nói về tính bị chặn và liên thông của tập nghiệm và tập nghiệm yếu trong bài toán bất đẳng thức biến phân véctơ affine

Mục 3 Trình bày bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức tuyến tính và bài toán tối ưu đa mục tiêu toàn phương lồi

Mục 4 Tính toán một số thí dụ cho bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức tuyến tính bằng cách đưa về bài toán bất đẳng thức biến phân affine

Các thí dụ trong [8] , [11] và [16] về tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine được tính toán chi tiết và trình bày tường minh. Một số thí dụ trước đây được tính toán dựa theo điều kiện cần và đủ tối ưu (tiêu chuẩn Malivert) trong bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức tuyến tính. Ở đây chúng tôi trình bày tính toán theo điều kiện cần và đủ để một điểm là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Duy Phượng- Viện Toán học. Thông qua luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới Thầy hướng dẫn, người tận tình chỉ bảo và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn. Tôi xin cảm ơn Khoa sau đại học, Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, tập thể lớp Cao học Toán K2, bạn bè, và đồng nghiệp về sự quan tâm giúp đỡ trong quá trình tôi thực hiện luận văn này. Và cuối cùng, xin cảm ơn Gia đình, vợ và các con đã giúp đỡ, động viên và khích lệ tôi rất nhiều trong thời gian nghiên cứu học tập.

CHƯƠNG I. BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

§1 BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.1 Bất đẳng thức biến phân

Định nghĩa 1.1. Cho $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$ và K là một tập nào đó trong $\mathbb{R}^n$. Bài toán bất đẳng thức biến phân (variational inequality, viết tắt là VI) được phát biểu như sau.

Tìm $x^* \in K$ sao cho

$$\left\langle F\left(x^*\right), x - x^*\right\rangle \geq 0,\ \ \forall x \in K. \tag{1.1}$$

Bất đẳng thức (1.1) cũng thường được viết dưới dạng

$$F\left(x^*\right)^T\left(\ x - x^*\right) \geq 0,\ \ \forall x \in K, \tag{1.1'}$$

trong đó $\langle a,b\rangle$ kí hiệu là tích vô hướng của hai véctơ a và b trong không gian $\mathbb{R}^n$, còn A^T và x^T là chuyển vị của ma trận A và véctơ $x.$ Ta luôn qui ước véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ là véctơ cột.

Bài toán bất đẳng thức biến phân được xác định bởi ánh xạ F và tập $K,$ vì vậy, khi cần làm rõ, ta kí hiệu bài toán bất đẳng thức biến phân là $\mathrm{VI}(F,K).$

Các điểm $x^* \in K$ thỏa mãn (1.1) được gọi là *nghiệm* của bất đẳng thức biến phân (1.1) hay *điểm dừng* của ánh xạ F. Tập tất cả các điểm $x^* \in K$ thỏa mãn (1.1) được gọi là *tập nghiệm* của bất đẳng thức biến phân (1.1).

Tập tất cả các nghiệm của bất đẳng thức biến phân được kí hiệu là $\mathrm{Sol}(\mathrm{VI})$ hoặc $\mathrm{Sol}(\mathrm{VI}(F,K)).$

Kí hiệu $\mathbb{R}^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ x \geq 0\right\}.$ Khi ấy $-\mathbb{R}^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ x \leq 0\right\}.$

Vậy bất đẳng thức $\left\langle F\left(x^*\right), x - x^*\right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in K$ có thể viết dưới dạng

$$\left\langle F(x^*), x - x^*\right\rangle \notin -\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Ngôn ngữ bất đẳng thức biến phân khá thuận tiện, nó có thể thống nhất được nhiều bài toán, thí dụ, bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, phương trình suy rộng… Dưới đây chúng ta sẽ xét mối liên quan giữa bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán khác.

1.2 Bài toán tối ưu một mục tiêu

1.2.1 Tối ưu hàm một biến

Trước tiên ta xét hàm một biến nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Cho $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi trên $[a;b]$, nghĩa là tồn tại đạo hàm tại mọi điểm $x_0 \in (a;b)$ và tồn tại đạo hàm từ bên phải $f'(a_+) := \lim\limits_{x \to a_+} f'(x)$ và tồn tại đạo hàm từ bên trái $f'(a_-) := \lim\limits_{x \to a_-} f'(x)$.

Điểm x^* được gọi là *điểm cực tiểu* (điểm tối ưu) của f nếu

$$f(x^*) = \min_{x \in [a;b]} f(x).$$

Kí hiệu $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ là *giá trị cực tiểu* của hàm số f trên $[a;b]$.

Khi đó theo điều kiện cần cực trị Fermat ta có

- Nếu $x^* \in (a;b)$ thì $f'(x^*) = 0$.
- Nếu $x^* = a$ thì $f'(a_+) \geq 0$.
- Nếu $x^* = b$ thì $f'(b_-) \leq 0$.

Cả ba trường hợp này có thể viết gọn lại như sau.

Mệnh đề 1.1. *Điểm x^* là điểm cực tiểu của f trên $[a;b]$ thì*

$$f'(x^*)\left(x - x^*\right) \geq 0, \forall x \in \left[a;b\right].$$

Thí dụ 1.1

Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + x - 3.$

a) Tìm $\min\limits_{x \in [-2;2]} f(x)$

Trên đoạn $[-2;2]$ thì $\min\limits_{x \in [-2;2]} f(x) = f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{25}{8}$ và $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$

b) Tìm $\min\limits_{x \in [1;5]} f(x)$

Trên đoạn $[1;5]$ thì $\min\limits_{x \in [1;5]} f(x) = f(1) = 0$ và $f'\left(1\right) = 5 > 0$.

c) Tìm $\min\limits_{x \in [-4;-1]} f(x)$

Trên đoạn $[-4;-1]$ thì $\min\limits_{x \in [-4;-1]} f(x) = f(-1) = -2$ và $f'\left(-1\right) = -3 < 0$.

1.2.2 Tối ưu hàm nhiều biến

Cho $f : K \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ từ tập $K \subset \mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, ..., x_n).$

Xét bài toán tối ưu: Tìm

$$\min\left\{ f(x) : x \in K \right\}. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.2. Nếu điểm $x^* \in K$ được gọi là *điểm cực tiểu địa phương* của bài toán tối ưu (1.1) nếu tồn tại một lân cận $U(x^*)$ của điểm x^* sao cho

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ với mọi } x \in K \cap U(x^*).$$

Giả sử $f\left(x\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ có đạo hàm riêng

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

theo mọi biến tại mọi điểm $x \in K \subset \mathbb{R}^n$. Đặt $F(x) := \nabla f(x)$. Khi ấy với mỗi $x \in K$ thì $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ hay $F : K \to \mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử $K \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, đóng, khác rỗng. Nếu $x^* \in K$ là điểm cực tiểu địa phương của bài toán tối ưu* (1.2) *trên K thì*

$$\left\langle F\left(x^*\right), x - x^*\right\rangle \geq 0,\ \ \forall x \in K. \tag{1.3}$$

Điều kiện (1.3) *được gọi là điều kiện cần cực trị của bài toán tối ưu* (1.2).

Chứng minh

Giả sử $x^* \in K$ là điểm cực tiểu địa phương của f. Lấy bất kì một điểm $x \in K$, $x \neq x^*$. Do K là tập lồi nên đoạn thẳng $\left[x; x^*\right]$ nằm trong K, tức là

$$x_t := x^* + t\left(x - x^*\right) \in K \quad \forall t \in [0;1].$$

Đặt $u : [0;1] \to K$ là hàm số xác định bởi $t \mapsto u(t) = x_t$

Với mỗi x cố định ta xét hàm số $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$t \mapsto \varphi(t) = f(u)(t) = f\left(x_t\right) = f\left(x^* + t\left(x - x^*\right)\right).$$

Khi đó φ là hàm hợp của hai hàm khả vi f và u nên φ cũng là hàm khả vi trên $[0;1]$ và nếu f đạt cực tiểu tại x^* thì φ đạt cực tiểu tại $t = 0$. Theo điều kiện cần cực tiểu cho bài toán tối ưu hàm một biến ta có

$$\varphi'\left(0_+\right) = \mathrm{grad} f\left(x^*\right)\left(x - x^*\right) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Đặt $F(x) := \mathrm{grad} f(x) = \nabla f(x)$. Khi đó $x^* \in K$ là điểm cực tiểu của f thì

$$\left\langle F\left(x^*\right), x - x^*\right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Mệnh đề chứng minh xong.

Nhận xét 1.1. Như vậy, tập các điểm dừng của bài toán tối ưu (1.2) chính là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (1.1). Hơn nữa, theo Mệnh đề dưới đây, nếu $f(x)$ là hàm lồi trên K thì ta có điều ngược lại.

Mệnh đề 1.3. *Cho K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Nếu $f(x)$ là hàm lồi khả vi trên K và $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân* (1.1) *thì x^* cũng là nghiệm của bài toán tối ưu* (1.2).

Chứng minh

Vì $f(x)$ là hàm lồi trên K nên ta có

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \quad \forall x \in K.$$

Vì $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (1.1) nên ta có

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Suy ra $f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in K$ hay x^* là nghiệm của bài toán tối ưu (1.2).

Như vậy, trong trường hợp $f(x)$ là hàm lồi khả vi trên K thì bài toán bất đẳng thức biến phân (1.1) và bài toán tối ưu (1.2) là tương đương.

Dưới đây ta sẽ xét câu hỏi: Với điều kiện nào thì bài toán bất đẳng thức biến phân (1.1) có thể đưa về bài toán tối ưu (1.2)?

Kí hiệu $M(n,n)$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n. Trước tiên ta đưa vào các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3. Ma trận $A \in M(n,n)$ được gọi là *nửa xác định dương* trên $\mathbb{R}^n$ nếu nó thỏa mãn điều kiện $x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.4. Ma trận $A \in M(n,n)$ được gọi là *ma trận xác định dương* trên $\mathbb{R}^n$ nếu nó thoả mãn các điều kiện sau