

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TRUNG NGHĨA

PHƯƠNG TRÌNH HÀM
TRONG LỚP CÁC HÀM SỐ
LƯỢNG GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học
GS-TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu.....	2
Chương 1. Một số đặc trưng hàm của hàm số lượng giác.....	4
1.1. Một số kiến thức chuẩn bị.....	4
1.2. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác cơ bản	8
1.3. Đặc trưng hàm của các hàm hyperbolic.....	9
1.4. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác ngược	9
Chương 2. Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác, lượng giác hyperbolic	10
2.1. Phương trình d'Alembert trong lớp hàm số liên tục.....	10
2.2. Phương trình d'Alembert trong lớp các hàm số không liên tục.	16
2.3. Phương trình hàm sinh bởi hàm sin và sin hyperbolic.....	30
2.4. Phương trình hàm sinh bởi hàm tang, tang hyperbolic	41
2.5. Một số dạng phương trình hàm sinh bởi đặc trưng hàm của cặp hàm sin và cosin	44
Chương 3. Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác ngược và một số bài tập.....	52
3.1. Phương trình hàm sinh bởi hàm arcsin	52
3.2. Phương trình hàm sinh bởi hàm arccosin	53
3.3. Phương trình hàm sinh bởi hàm arctang.....	53
3.4. Một số dạng phương trình hàm khác	54
3.5. Một số bài tập.....	56
Kết luận	76
Tài liệu tham khảo	77

Mở đầu

Phương trình hàm là một chuyên đề quan trọng trong giải tích, đặc biệt là chương trình chuyên toán bậc THPT. Các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, thi Olympic khu vực, Olympic Quốc tế thường xuất hiện bài toán về phương trình hàm, đó là những bài toán khó và mới mẻ đối với học sinh THPT. Những cuốn sách tham khảo dành cho học sinh về lĩnh vực này là không nhiều. Đặc biệt trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh THPT thì phương trình hàm trong lớp các hàm số lượng giác chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Xuất phát từ thực tế đó, mục tiêu chính của luận văn là cung cấp thêm cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi, có năng khiếu và yêu thích môn toán một tài liệu tham khảo, ngoài những kiến thức lý thuyết cơ bản luận văn còn có thêm một hệ thống các bài tập về phương trình hàm xuất phát từ các công thức biến đổi lượng giác và lời giải cho từng bài. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục nghiên cứu và hoàn thiện trong quá trình giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

Ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương.

Chương 1. Một số đặc trưng của hàm số lượng giác.

Trong chương này luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị và chỉ ra các đặc trưng của hàm số lượng giác, hàm số lượng giác hyperbolic, hàm số lượng giác ngược.

Chương 2. Phương trình hàm trong lớp hàm số lượng giác, hàm lượng giác hyperbolic.

Trong chương này luận văn trình bày phương trình hàm d'Alembert trong lớp các hàm số liên tục, phương trình hàm d'Alembert trong lớp hàm không liên tục, phương trình hàm sinh bởi các đặc trưng của hàm sin

và sin hypebolic, các phương trình hàm sinh bởi đặc trưng của hàm tang, tang hyperbolic và một số dạng khác.

Chương 3. Phương trình hàm trong lớp các hàm số lượng giác ngược và một số bài tập.

Trong chương này luận văn trình bày về phương trình hàm sinh bởi các đặc trưng của hàm số lượng giác ngược và một số bài tập về phương trình hàm sinh bởi các công thức biến đổi lượng giác.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người thầy rất nghiêm khắc, tận tâm trong công việc và đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học toán K3A.

Tác giả xin chân thành cảm ơn UBND tỉnh, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Yên Bái, Ban Giám hiệu và tập thể giáo viên trường THPT Chu Văn An tỉnh Yên Bái đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin được cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ nhiệt tình của các anh chị em học viên lớp cao học toán K2, K3 Trường Đại học Khoa học đối với tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu trong suốt khóa học. Tuy nhiên, do điều kiện thời gian và hạn chế của bản thân nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2011

Người thực hiện

Nguyễn Trung Nghĩa

Chương 1

Một số đặc trưng hàm của hàm số lượng giác

Những công thức biến đổi lượng giác cơ bản đã được trình bày trong sách giáo khoa phổ thông cho ta các đặc trưng hàm của những hàm lượng giác tương ứng. Đó là cơ sở để ta thiết lập các phương trình hàm mà các ẩn hàm là một trong các hàm lượng giác đã biết. Trong chương này, luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị, các đặc trưng hàm của các hàm lượng giác, lượng giác hyperbolic, lượng giác ngược. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu tham khảo [2] [4].

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D_f \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm chẵn trên M , $M \subset D_f$ (gọi tắt là hàm chẵn trên M) nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = f(x), \quad \forall x \in M.$$

Định nghĩa 1.2. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M , $M \subset D_f$ (gọi tắt là hàm lẻ trên M) nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in M.$$

Định nghĩa 1.3. Cho hàm số $f(x)$ và tập $M (M \subset D_f)$. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương α sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm \alpha \in M, \\ f(x + \alpha) = f(x), \quad \forall x \in M; \end{cases} \quad (1.1)$$

số α dương nhỏ nhất thỏa mãn (1.1) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ 1.1. Hàm $f(x) = \cos x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.4. Cho hàm $f(x)$ và tập $M (M \subset D_f)$. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm số phản tuần hoàn trên tập M nếu tồn tại số dương α sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm \alpha \in M, \\ f(x + \alpha) = -f(x), \quad \forall x \in M; \end{cases} \quad (1.2)$$

số α nhỏ nhất thỏa mãn (1.2) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ 1.2. Hàm $f(x) = \sin x$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ π trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x \pm \pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.5. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D_f$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow \alpha^{\pm 1}x \in M, \\ f(\alpha x) = f(x), \quad \forall x \in M; \end{cases} \quad (1.3)$$

số α dương nhỏ nhất thỏa mãn (1.3) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn nhân tính $f(x)$.

Ví dụ 1.3. Hàm $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$f(2x) = \sin[2\pi \log_2(2x)] = \sin[2\pi(1 + \log_2 x)] = \sin(2\pi \log_2 x) = f(x).$$

Định nghĩa 1.6. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D_f$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow \alpha^{\pm 1}x \in \mathbb{R}, \\ f(\alpha x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (1.4)$$

số α nhỏ nhất thỏa mãn (1.4) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn nhân tính.

Ví dụ 1.4. Hàm $f(x) = \cos(\pi \log_3 x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $3^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$f(3x) = \cos[\pi \log_3(3x)] = \cos[\pi(1 + \log_3 x)] = -\cos(\pi \log_3 x) = -f(x).$$

Định nghĩa 1.7. Tập $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ được gọi là trù mật trong $\mathbb{R}$ ký hiệu $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $(x < y)$ luôn tồn tại $\alpha \in \mathcal{A}$, sao cho $x < \alpha < y$.

Định nghĩa 1.8. Tập $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ được gọi là trù mật trong $\mathbb{R}$ ký hiệu $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ nếu với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số $(a_n) \subset \mathcal{A}$, sao cho $a_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow \infty$.

Định nghĩa 1.9. Cho $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{B}$, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $y \in \mathcal{A}$, sao cho $|x - y| < \varepsilon$ thì $\mathcal{A}$ được gọi là tập trù mật trong $\mathcal{B}$, ký hiệu là $[\mathcal{A}] = \mathcal{B}$.

Nhận xét 1.1. Định nghĩa 1.7 và định nghĩa 1.8 tương đương với nhau.

Định nghĩa 1.10. Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathcal{A}$ trong đó $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ thì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta thường sử dụng một số tập trù mật trong $\mathbb{R}$ sau

1. Với $\mathbb{Q} :=$ tập các số hữu tỷ, ta có $[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$.
2. Với $\mathfrak{S} =$ tập các số vô tỷ, ta có $[\mathfrak{S}] = \mathbb{R}$.
3. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ tập $\{\alpha + r \mid \alpha \in \mathcal{A}, r = \text{const}, r \in \mathbb{R}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
4. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ tập $\{\alpha r \mid \alpha \in \mathcal{A}, r = \text{const}, r \neq 0, r \in \mathbb{R}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
5. Tập $\{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}^+; m \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
6. Tập $\{m\alpha - n \mid \alpha \in \mathfrak{S}; m, n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.1 (Phương trình hàm Cauchy). Tìm hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = f(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ f(x) \text{ liên tục tại } x = x_0 \in \mathbb{R}, \\ f(1) = \alpha, \quad (\alpha \neq 0). \end{cases}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Cho $y = -x$ ta được $f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm $f(x)$ là hàm số lẻ nên ta chỉ cần xác định biểu thức của $f(x)$ với $x > 0$.

Cho $y = x$ suy ra $f(2x) = 2f(x)$. Giả sử $f(kx) = kf(x), (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$$

Theo nguyên lý quy nạp ta được $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n \in \mathbb{Z}^-$ suy ra $-n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f(nx) = f((-n)(-x)) = -nf(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x) \quad (\text{do } f(x) \text{ là hàm số lẻ}).$$

Suy ra $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}^-$. Kết hợp với $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$ ta được

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}.$$

Với $m \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$f(x) = f\left(m \frac{x}{m}\right) = mf\left(\frac{x}{m}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}f(x).$$

Với $r \in \mathbb{Q}$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{Z}$ sao cho $r = \frac{n}{m}$. Từ các kết quả trên, ta có

$$f(rx) = f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x) = rf(x), \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Cho $x = 1$ ta được $f(r) = rf(1) = \alpha r, \forall r \in \mathbb{Q}$. Với $\forall m \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x) = f(x + x_0 - m + m - x_0) = f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0).$$

Từ giả thiết hàm số liên tục tại $x = x_0$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow m} f(x) &= \lim_{x \rightarrow m} [f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow m} f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + f(m) - f(x_0) = f(m). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $m \in \mathbb{R}$. Nói cách khác $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, tồn tại dãy số $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, sao cho $r_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó, vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha r_n = \alpha x.$$

Thử lại, dễ thấy hàm số $f(x) = \alpha x$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài toán 1.2 (Phương trình hàm Cauchy dạng mũ). Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Giải. Dễ thấy $f \equiv 0$ ¹ là một nghiệm của (1.5).

Xét trường hợp $f \not\equiv 0$ ², khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Theo (1.5) thì $f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, mặt khác

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\ln f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = e^{g(x)}$. Khi đó $g(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(x+y) = \ln[f(x)f(y)] \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo bài toán 1.1 thì $g(x) = bx, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, suy ra $f(x) = e^{bx} = a^x$ với $a > 0$.

Kết luận: Nghiệm của bài toán là $f \equiv 0$ hoặc $f(x) = a^x, a > 0$.

1.2. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác cơ bản

a) Hàm $f(x) = \sin x$ có tính chất

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2, \quad \text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và

$$f(3x) = 3f(x) - 4[f(x)]^3, \quad \text{với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm $f(x) = \cos x$ có các tính chất

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad \text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

và

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1, \quad \text{với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cặp hàm $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

¹Để đơn giản trong ký hiệu ta hiểu $f \equiv c$ nghĩa là $f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

² $f \not\equiv c$ được hiểu là $\exists x_0, (x_0 \in D_f)$ sao cho $f(x_0) \neq c$.

c) Hàm $\tan x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y, x+y \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Hàm $f(x) = \cot x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y, x+y \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1.3. Đặc trưng hàm của các hàm hyperbolic

a) Hàm sin hyperbolic $f(x) = \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) + 4[f(x)]^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm cosin hyperbolic $g(x) = \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ có tính chất

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Hàm tan hyperbolic $h(x) = \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tính chất

$$h(x+y) = \frac{h(x) + h(y)}{1 + h(x)h(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Hàm cotan hyperbolic $q(x) = \coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tính chất

$$q(x+y) = \frac{1 + q(x)q(y)}{q(x) + q(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0.$$

1.4. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác ngược

a) Hàm $f(x) = \arcsin x$ có các tính chất

$$f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad \text{với } \forall x, y \in [-1; 1].$$

b) Hàm $g(x) = \arccos x$ có tính chất

$$g(x) + g(y) = g(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \quad \text{với } \forall x, y \in [-1; 1].$$

c) Hàm $h(x) = \arctan x$ có tính chất

$$h(x) + h(y) = h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad \text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq 1.$$

d) Hàm $p(x) = \operatorname{arccot} x$ có tính chất

$$p(x) + p(y) = p\left(\frac{xy-1}{x+y}\right), \quad \text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0.$$