ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Trung Thành

SỬ DỤNG BẤT BIẾN TRONG GIẢI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên - 2011

Công trình được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: GS-TSKH-HÀ HUY KHOÁI

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày .... tháng .... năm 2011

Có thể tìm hiểu tại
THƯ VIỆN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mục lục

Mở đầu

"Dĩ biến ứng vạn biến" đó là lời Bác Hồ dặn cụ Huỳnh Thúc Kháng trước khi Bác lên đường sang Pháp năm 1946, giao lại trọng trách Quyền Chủ Tịch nước cho cụ Huỳnh Thúc Kháng. "Bất biến" ở đây là độc lập dân tộc, trên cơ sở đó mà tìm ra những đối sách mềm dẻo thích hợp với tình hình trong hoàn cảnh đất nước đang ngàn cân treo sợi tóc. Câu nói trên cũng là "cẩm nang" cho chúng ta khi giải một loạt bài toán rời rạc, từ Hình học đến Số học, mà điều quan trọng nhất là tìm cho ra một "bất biến".

Vậy bất biến là gì? Đó là những đặc điểm có tính cố định của một đối tượng trong suốt quá trình biến đổi, chuyển hoá. Nếu ta xác định được bất biến ta sẽ phân biệt được mối quan hệ của các vật thể trước và sau quá trình biến đổi, để từ đó giải đáp được nhiều vấn đề một cách độc đáo và bất ngờ. Ta có thể phân tích trạng thái của hệ thống để xác định vị trí cần đạt được từ những vị trí khác. Một trong những công cụ rất mạnh cho việc phân tích hệ thống là tính bất biến của một số đại lượng trong hệ thống. Những đại lượng này không thay đổi dưới những thao tác khác nhau trong hệ thống. Hơn nữa, tính bất biến có thể dùng để chỉ ra rằng từ một cấu hình không thể đạt tới một cấu hình khác. Trong các kỳ thi học sinh giỏi, bất biến cũng thường xuyên xuất hiện một cách độc đáo trong các bài toán tổ hợp, số học, đại số, hình học, ... Tuy bài toán phức tạp, nhưng đã ẩn chứa những đại lượng bất biến, chẳng hạn như tính chẵn, lẻ hoặc tổng, tích các biến không thay đổi.

Mặc dù bất biến được sử dụng rộng rãi trong giải toán sơ cấp, cho đến nay, theo chỗ chúng tôi được biết, chưa có một tài liệu nào viết một cách có hệ thống về vấn đề này. Vì thế, chúng tôi cố gắng sưu tầm từ rất nhiều tài liệu khác nhau, chọn lọc những bài toán mà công cụ chủ yếu sử dụng là phương pháp bất biến để làm thành luận văn này. Trong chừng mực có thể, chúng tôi không chỉ nêu lời giải của các bài toán như những tài liệu khác, mà còn cố gắng phân tích, phát hiện bất biến mới và lời giải của bài toán dựa vào đó. Điều này có thể có ích cho học sinh khi tìm hiểu về phương pháp đó. Chúng tôi cũng cố gắng trình bày thông qua những bài tập thuộc nhiều loại khác nhau như hình học, tổ hợp, số học, nhằm làm nổi bật tính phổ dụng của phương pháp bất biến trong giải toán sơ cấp.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Nguyên lý về bất biến. Trong chương I này chúng tôi tập trung trình bày về nguyên lý bất biến đây là cơ sở để giải những bài toán ở 2 chương sau. Nó được chia thành 2 mục trong đó mục 1.1 giới thiệu về phương pháp bất biến, mục 1.2 trình bày khái niệm về bất biến.

Chương 2. Một số bất biến trong bảng số. Trong chương này, chúng tôi chọn lọc giới thiệu một số bài toán thuộc dạng đó và chia thành 2 dạng toán; trong đó mục 2.1 chúng tôi trình bày một số bài toán mà bất biến dựa trên tính chia hết, mục 2.2 trình bày một số bài toán mà bất biến của nó là một đại lượng nào đó.

Chương 3. Một số loại bài toán khác. Ngoài những bài toán trên bảng ô vuông mà đã trình bày ở chương II, ở chương này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán khác nhau mà phương pháp giải cũng là sử dụng bất biến nào đó.

Luận văn này đã được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái - Viện Toán học Hà Nội. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH. Hà Huy Khoái.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các thầy, cô đang công tác tại Khoa Toán, Phòng quản lý khoa học Trường Đại Học Khoa Học cũng như các thầy, cô tham gia giảng dạy Khóa Cao học 2009 - 2011 đã tạo điều kiện tốt cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Do thời gian có hạn và sự hiểu biết của bản thân nên luận văn này mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày kết quả theo từng chủ đề đặt ra. Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định và tác giả rất mong nhận được góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2011

Tác giả

Nguyễn Trung Thành

Chương 1

NGUYÊN LÍ BẤT BIẾN

1.1. Giới thiệu về phương pháp đại lượng bất biến

Ví dụ 1.1.1. *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c và c cho a thì tổng S luôn chỉ là một số.*

Ví dụ 1.1.2. Ta xét bài toán xuất phát từ câu chuyện cổ tích: *Người nông dân trồng được một cây khế thần có 99 quả chưa chín màu xanh và 1000 quả đã chín màu vàng. Một con Quạ đến ăn mỗi ngày hai quả khế và nói với người nông dân: "Ăn một quả trả cục vàng, may túi ba gang đem đi mà đựng". Quạ đến ăn hai quả khế bất kì không phân biệt quả xanh và quả vàng. Nếu Quạ ăn một quả vàng và một quả xanh thì cây khế lại sinh ra một quả xanh. Nếu Quạ ăn hai quả vàng thì cây khế lại sinh ra một quả vàng. Nếu Quạ ăn hai quả xanh thì cây khế lại sinh cũng quả vàng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp quả khế cuối cùng còn lại trên cây là màu vàng không?*

Để thuận tiện cho việc giải bài toán ta kí hiệu: Quả khế xanh là X; quả khế vàng là V; quạ ăn quả là $(+)$ và cây khế sinh quả là (-). Khi đó bài toán có thể viết lại ngắn gọn: $V + V = V, X + X = V, V + X = X$. Từ cách viết trên ta thấy rằng số lượng quả xanh hoặc không thay đổi hoặc là giảm đi hai quả sau mỗi lần ăn (mỗi lần Quạ ăn hai quả). Vì trên cây, số những quả màu xanh là lẻ, còn số những quả màu vàng là chẵn, nên quả cuối cùng trên cây sẽ là màu xanh, không phụ thuộc vào cách ăn quả của Quạ.

Tính bất biến trong bài toán trên là gì? Đó là số những quả xanh dù Quạ có ăn quả như thế nào đi nữa thì nó không thay đổi hoặc nếu nó thay đổi thì thay đổi một cách cố định là giảm đi hai quả. Như vậy, tính chẵn lẻ của số các quả xanh là một bất biến. Chính điều bất biến đối với quả xanh và giả thiết của bài toán đưa ta đến lời giải. Như vậy việc tìm ra bất biến trong những đại lượng đã cho của bài toán là rất quan trọng.

Những bài toán có dạng như một quy trình hay thuật toán thường tồn tại một trạng thái khởi đầu và một dãy những bước đi hợp lệ (bước biến đổi). Kết luận của những bài toán loại này thường phải trả lời những câu hỏi sau đây:

1. Có thể đạt tới một trạng thái cuối cùng đã cho không?
2. Tìm tất cả trạng thái cuối cùng có thể đạt tới?
3. Có tồn tại giới hạn tiến tới một trạng thái cuối cùng không?
4. Tìm tất cả chu kì có thể có trong dãy trạng thái?

1.2. Khái niệm về bất biến

Xét những bài toán mang cấu trúc một hệ thống mà trên đó ta phải xử lý những thao tác khác nhau ở từng mức độ. Vấn đề đặt ra: Có thể xác định được một vị trí nào đấy từ những vị trí đã biết? Một công cụ rất mạnh để giải quyết những bài toán như vậy là xét một số tính chất trong hệ thống mà nó không thay đổi trong từng bước thực hiện thao tác. Tính chất không thay đổi như trên thường được xem như là bất biến. Theo một số tài liệu tham khảo chúng tôi đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử ta có một hệ thống (F) các đại lượng và các phép biến đổi theo thứ tự. Tính chất P được gọi là một bất biến sau s bước trong hệ thống (F) nếu cứ s bước biến đổi ta đều nhận lại được tính chất P.*

Ví dụ 1.2.1. *Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định như dưới đây: $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z}$, $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = b_n - c_n$,$c_n + 1 = c_n - d_n$,$d_{n+1} = d_n - a_n, n \geq 0$.*
(i) Hãy chỉ ra không tồn tại số nguyên ban đầu a_0, b_0, c_0, d_0 để sao cho $|a_nb_n - c_nd_n|, |a_nc_n - b_nd_n|, |a_nd_n - b_nc_n|$ là số nguyên tố khi $n \geq 4$

(ii) Chứng minh rằng $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503}

Lời giải.

Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 2(a_0 - 2b_0 + 3c_0 - 2d_0) \\ b_4 = 2(b_0 - 2c_0 + 3d_0 - 2a_0) \\ c_4 = 2(c_0 - 2d_0 + 3a_0 - 2b_0) \\ d_4 = 2(d_0 - 2a_0 + 3b_0 - 2c_0) \end{cases}$$

Như vậy, cứ sau 4 bước biến đổi ta đều nhận được những số nguyên chia hết cho 2. Từ đây suy ra các số nguyên $|a_nb_n - c_nd_n|, |a_nc_n - b_nd_n|, |a_nd_n - b_nc_n|$ đều là các số nguyên chia hết cho 4 khi $n \geq 4$. Vì cứ sau 4 bước nhận được số chia hết cho 2 nên $a_{2012}, b_{2012}, c_{2012}, d_{2012}$ đều chia hết cho 2^{503}. Do vậy $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503}.

Ví dụ 1.2.2. *Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định như dưới đây:*

$$\begin{cases} a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z} \\ a_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n + d_n \\ c_n + 1 = c_n - d_n + a_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n + b_n, n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4.

Lời giải.

Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 21a_0 - 20b_0 + 20c_0 - 20d_0 \\ b_4 = 21b_0 - 20c_0 + 20d_0 - 20a_0 \\ c_4 = 21c_0 - 20d_0 + 20a_0 - 20b_0 \\ d_4 = 21d_0 - 20a_0 + 20b_0 - 20c_0 \end{cases}$$

Như vậy, cứ sau 4 bước biến đổi ta đều nhận được những số nguyên thỏa mãn tính chất P: $x_{k+4} \equiv x_k(\text{mod} 4)$. Từ đây suy ra $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4.

Ví dụ 1.2.3. *Xét dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như dưới đây:*

$$\begin{cases} a_0, b_0 \in \mathbb{R}, 0 < b_0 < a_0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}$.

Lời giải.

Do $a_0, b_0 > 0$ nên dễ dàng chỉ ra $a_n, b_n > 0$. Do bởi $(a_n + b_n)^2 \geq 4a_n b_n, a_n \neq b_n$, nên $(a_n > b_n)$ với mọi $n \geq 0$. Vì $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = a_n$ nên dãy (a_n) là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới nên tồn tại $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Bởi vì $b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} > b_n$ nên dãy (b_n) là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên nên tồn tại $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Sử dụng tính chất bất biến P: $a_n b_n = a_{n+1} b_{n+1}$ và $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ ta nhận được $a = b = \sqrt{a_0 b_0}$.