ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-------------------✍📖✍------------------

NGUYỄN VĂN THÁI

PHÂN DẠNG VÀ KĨ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN - 2011

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-------------------✍📖✍------------------

NGUYỄN VĂN THÁI

PHÂN DẠNG VÀ KĨ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2011

LỜI MỞ ĐẦU

Phép tính tích phân bắt nguồn từ nhu cầu sáng tạo phương pháp tổng quát để tìm diện tích, thể tích từ cách đây rất lâu. Ngày nay, phép tính vi tích phân chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong Toán học, và được ứng dụng rộng khắp trong các lĩnh vực như Xác suất thống kê, Vật lý, Thiên văn học, trong các nghành công nghiệp như đóng tàu, sản xuất ô tô, máy bay,...

Phép tính tích phân được giới thiệu cho các học sinh lớp 12, và được phổ biến tại các trường Đại học cho khối sinh viên năm thứ nhất và năm thứ 2. Đồng thời phép tính tích phân cũng là nội dung quan trọng trong các kì thi tốt nghiêp THPT, và tuyển sinh Đại học.

Trong luận văn này chúng tôi trình bày một số vấn đề "Phân dạng và kĩ thuật tính tích phân hàm một biến", cùng bài toán ứng dụng tính diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay.

Luận văn bao gồm 3 chương.

Chương 1. Trình bày các khái niệm, tính chất cơ bản của nguyên hàm tích phân hàm một biến.

Chương 2. Tập chung vào việc phân dạng và các kĩ thuật tính tích phân hàm một biến.

Chương 3. Trình bày về hai ứng dụng của tích phân hàm một biến, đó là xác định diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay.

Mặc dù đã cố gắng học tập và nghiên cứu một cách nghiêm túc, song chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp để hiệu chỉnh tốt hơn luận văn của quý thầy cô, và bạn bè đồng nghiệp.

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ dẫn trực tiếp của thầy hướng dẫn và sự trợ giúp của các thầy cô ở khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo, TS. Nguyễn Minh Khoa đã tận tình giảng dạy, chỉ bảo và ủng hộ trong suốt quá trình nghiên cứu viết luận văn của tôi. Cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại Học Khoa Học cùng

các thầy cô ở khoa Toán - Tin và bạn bè học viên lớp cao học Toán K3b, đã giúp đỡ động viên ủng hộ tôi trong suốt quá trình học tập, hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, … tháng 10 năm 2011

Học viên

Nguyễn Văn Thái.

Chương 1. Phép tính tích phân hàm một biến

1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

1.1.1. Định nghĩa

Hàm số $y = F(x)$ *được gọi là nguyên hàm của hàm số* $y = f(x)$ *trên* $(a;b)$ *nếu:* $F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.

Ví dụ 1.1.1.

Hàm số $y = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\sin x$ vì $(\cos x)' = -\sin x$

Hàm số $y = \arcsin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1;1)$ vì $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.1.2. Định lý về dạng tổng quát của nguyên hàm

Nếu trong khoảng $(a;b)$ *hàm số* $y = f(x)$ *có nguyên hàm là* $y = F(x)$*, thì trong khoảng ấy:*

i) $y = F(x) + C$ *với* C *là một hằng số tùy ý cũng là một nguyên hàm của* $y = f(x)$.

ii) Mọi nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ *đều có dạng* $y = F(x) + C$*, với* C *là hằng số tùy ý.*

Chứng minh:

i) Vì $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ *nên* $F(x) + C$*, với* C *là hằng số tùy ý là một nguyên hàm của* $y = f(x)$.

ii) Giả sử hàm số $y = H(x)$ *cũng là một nguyên hàm của* $y = f(x), \forall x \in (a;b)$.

Ta có: $[H(x) - F(x)]' = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in (a;b)$.

Suy ra, $H(x) - F(x) = C, \forall x \in (a;b) \quad \Leftrightarrow H(x) = F(x) + C$ *(đpcm).*

1.1.3. Tính chất.

Tính chất 1. *Cho* $y = f(x)$ *là hàm số có nguyên hàm, khi đó* $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

Tính chất 2. *Nếu* $y = F(x)$ *có đạo hàm, ta có* $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + c$, c *là hằng số.*

Tính chất 3. *Giả sử* $f(x); g(x)$ *là hai hàm số có nguyên hàm. Với hai số thực* $\alpha; \beta$ *bất kỳ:* $\int\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

Tính chất 4. *Nếu* $\int f(t)dt = F(t) + c$ *thì:*

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + c = F(u) + c \text{ với } u = u(x)$$

1.1.4. Nguyên hàm một số hàm cơ bản

	$u = u(x)$
• $\int 0\,dx = C$	• $\int du = u + C$
• $\int dx = x + C$	• $\int u^{\alpha} du = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
• $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$	• $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
• $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	• $\int \sin\alpha u\,du = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha u + C$
• $\int \sin\alpha x\,dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C$	• $\int \cos\alpha u\,du = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha u + C$
• $\int \cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x + C$	• $\int e^{\beta u}dx = \frac{1}{\beta}e^{\beta u} + C$
• $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$	• $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$
• $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$	• $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$
• $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	• $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$
• $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	• $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$
• $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	

Ví dụ 1.1.2. Tính các nguyên hàm sau.

• $I_1 = \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\int \left(ax+b\right)^\alpha d\left(ax+b\right) = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + c$

• $I_2 = \int (\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x})dx = \int x^{-4}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$

• $I_3 = \int x(ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\int \left[\left(ax+b\right) - b\right]\left(ax+b\right)^\alpha d\left(ax+b\right)$

$= \frac{1}{a}\int (ax+b)^{\alpha+1} d\left(ax+b\right) - \frac{b}{a}\int (ax+b)^\alpha d\left(ax+b\right)$

$= \frac{1}{a^2}.\frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{b}{a^2}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

1.1.5. Một số nguyên hàm mở rộng

• $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

• $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

• $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

• $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad ; a > 0$

• $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\left|\frac{x}{a}\right| + C$

• $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C$

• $\int \ln\left(ax+b\right)dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln\left(ax+b\right) - x + C$

Chú ý: Khi sử dụng một trong các công thức trên, ta cần phải chứng minh công thức đó bằng cách lấy đạo hàm hai vế.

1.2. Tích phân xác định

1.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa tổng tích phân:

Giả sử hàm $y = f(x)$ *xác định và bị chặn trên* $[a;b]$. *Với phép phân hoạch bất kỳ* δ *của* $[a;b]$ *tức là chia đoạn* $[a;b]$ *thành:* $a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$, *lấy bất kỳ điểm* $\xi_k \in [x_{i-1}; x_i], i = \overline{1;n}$*; gọi độ dài của* $[x_{i-1}; x_i]$ *là* $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. *Khi đó:*

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = f(\xi_1)\Delta_1 + f(\xi_2)\Delta_2 + ... + f(\xi_n)\Delta_n$ *được gọi là tổng tích phân của hàm số* $y = f(x)$ *ứng với phép phân hoạch* δ *trên* $[a;b]$.

Định nghĩa tích phân xác định:

Giả sử $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = f(\xi_1)\Delta_1 + f(\xi_2)\Delta_2 + ... + f(\xi_n)\Delta_n$ *là tổng tích phân của hàm số* $y = f(x)$ *ứng với phép phân hoạch* ∂ *trên* $[a;b]$. *Nếu tồn tại giới hạn* $\lim_{Max\Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = I$ *thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số* $y = f(x)$ *trên* $[a;b]$ *và kí hiệu là:*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Khi đó hàm $y = f(x)$ *được gọi là khả tích trên* $[a;b]$.

1.2.2. Công thức

Công thức Newton – Leipnitz. Nếu $\int f(x)d\mathrm{x} = F(x) + C, \forall x \in (a;b)$ *thì:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)d\mathrm{x} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Công thức đảo cận. Giả sử $f(x)$ *khả tích trên [a; b] thì:* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *và* $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Công thức tách cận. Giả sử $f(x)$ *khả tích trên* $[a;\ b]$ *ta có:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ ,\forall c \in (a;b)$$

Công thức tích phân từng phần. Giả sử $u = u(x); v = v(x)$ *khả tích trên* $[a;\ b]$

Ta có: $$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Công thức đổi biến. Giả sử $y = f(x)$ *liên tục trên* $[a;\ b]$ *và* $x = \varphi(t)$ *khả vi liên tục trên* $[c;\ d]$ *và* $min\varphi(t)_{[c;d]} = a$ *;* $max\varphi(t)_{[c;d]} = b$ *;* $\varphi(c) = a; \varphi(d) = b$. *Ta có công thức đổi biến số.* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$

1.2.3. Tính chất

Tính chất 1. *Nếu hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[a;\ b]$ *thì nó khả tích trên* $[a;b]$

Tính chất 2. *Giả sử* $f(x); g(x)$ *khả tích trên* $[a;\ b]$ *và với* $\forall \alpha; \beta \in \mathbb{R}$ *ta có:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Tính chất 3. *Nếu* $f(x)$ *là hàm chẵn và liên tục trên* $[-a;a]$ *thì,*

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Tính chất 4 . *Nếu* $f(x)$ *là hàm lẻ và liên tục trên* $[-a;a]$ *thì* $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Tính chất 5*. Cho* $f(x)$ *liên tục trên* $[a;b]$ *và* $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Tính chất 6. *Nếu* $f(x); g(x)$ *là hai hàm liên tục và* $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a;b]$ *thì*