Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sỹ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của của cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, của các thầy cô trong Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè và các bạn đồng nghiệp đã động viên tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để tôi có được điều kiện tốt nhất khi nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Xuân Bách

Mở đầu

Rất nhiều bài toán của thực tiễn, khoa học, công nghệ dẫn tới bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)* theo nghĩa Hadamard [8], nghĩa là bài toán (khi dữ kiện thay đổi nhỏ) hoặc không tồn tại nghiệm, hoặc nghiệm không duy nhất, hoặc nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do tính không ổn định này của bài toán đặt không chỉnh nên việc giải số của nó gặp khó khăn. Lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến một sai số bất kỳ trong lời giải.

Trong luận văn này chúng tôi nghiên cứu bài toán đặt không chỉnh dưới dạng phương trình toán tử

$$A(x) = f, \tag{1}$$

trong đó $A : X \longrightarrow X^*$ là một toán tử đơn trị từ không gian Banach phản xạ X vào không gian liên hợp X^* của X. Để giải loại bài toán này, người ta sử dụng những phương pháp ổn định sao cho khi sai số của các dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Năm 1963, A. N. Tikhonov [9] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử (0.1) trong không gian Hilbert thực H dựa trên việc tìm phần tử cực tiểu $x_\alpha^{h,\delta}$ của phiếm hàm Tikhonov

$$F_\alpha^{h,\delta}(x) = \|A_h(x) - f_\delta\|^2 + \alpha\|x - x_*\|^2 \tag{2}$$

trong đó $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc vào h và δ, x_* là phần tử cho trước đóng vai trò là tiêu chuẩn chọn và (A_h, f_δ) là xấp xỉ của (A, f).

Hai vấn đề cần được giải quyết ở đây là tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov và chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(h, \delta)$ thích hợp để phần tử cực tiểu $x^{h,\delta}_{\alpha(h,\delta)}$ dần tới nghiệm chính xác của bài toán (0.1) khi h và δ dần tới không.

Việc tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov sẽ gặp nhiều khó khăn trong trường hợp bài toán phi tuyến. Đối với lớp bài toán phi tuyến với toán tử đơn điệu $A : X \to X^*$, F. Browder đưa ra một dạng khác của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Tư tưởng chủ yếu của phương pháp do F. Browder đề xuất là sử dụng một toán tử $M : X \to X^*$ có tính chất h-liên tục, đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh. J^s, ánh xạ đối ngẫu tổng quát của X, là một toán tử có tính chất như vậy. Bằng phương pháp này, Ya. I. Alber [1] nghiên cứu phương trình hiệu chỉnh

$$A_h(x) + \alpha J^s(x - x_*) = f_\delta \tag{3}$$

cho bài toán (0.1) khi $A_h : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu.

Việc chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(\delta)$ thích hợp cho phương trình hiệu chỉnh (0.3) khi $A_h \equiv A$ đã được đánh giá bởi đẳng thức

$$\rho(\alpha) = \tilde{K}\delta^p, \ 0 < p < 1, \ \tilde{K} \geq 1,$$

với $\rho(\alpha) = \alpha\|x^\delta_\alpha\|$. Phương trình hiệu chỉnh (0.3) cùng cách chọn tham số $\alpha = \alpha(\delta)$ như trên là một thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov cho phương trình toán tử không chỉnh (0.1). Năm 2005, Nguyễn Bường [5] đã nghiên cứu việc chọn giá trị của tham số hiệu chỉnh theo nguyên lí độ lệch suy rộng trên cơ sở giải phương trình

$$\rho(\alpha) = \delta^p\alpha^{-q}, \ 0 < p \leq q$$

cho bài toán (0.1) khi xét phương trình hiệu chỉnh (0.3) trong trường hợp $A_h \equiv A$.

Trong trường hợp $A : X \to X$ là một toán tử accretive, người ta sử dụng phương trình hiệu chỉnh [2]

$$A_h(x) + \alpha x = f_\delta,$$

trong đó $A_h : X \longrightarrow X$ cũng là một toán tử accretive với $D(A_h) = D(A)$.

Mục đích của luận văn nhằm trình bày phương pháp giải ổn định phương trình toán tử (0.1) với toán tử đơn điệu và toán tử accretive. Chú ý rằng, trong không gian Hilbert thì tính đơn điệu và accretive của toán tử là trùng nhau [3]. Các vấn đề được đề cập trong luận văn là:

1. Hiệu chỉnh phương trình toán tử (0.1) với toán tử đơn điệu và toán tử accretive;

2. Sự hội tụ và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh;

3. Ví dụ số.

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản nhất về phương trình với toán tử đơn điệu và toán tử accretive.

Trong chương 2 trình bày phương pháp hiệu chỉnh phương trình với toán tử đơn điệu và toán tử accretive của Ya. I. Alber [1] và [2], trình bày tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh ứng với tham số hiệu chỉnh chọn tiên nghiệm của Nguyễn Bường [5] và [6]. Cuối cùng là một ví dụ số minh họa.

MỘT SỐ KÍ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$a \sim b$	a tương đương với b
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Chương 1
Phương trình với toán tử accretive

1.1. Toán tử đơn điệu

1.1.1. Toán tử đơn điệu

Cho X là không gian Banach thực phản xạ, $A : X \to X^*$ là một toán tử với miền xác định là $D(A) = X$ và miền ảnh $R(A)$ nằm trong X^*. Các khái niệm trong mục này được tham khảo trong các tài liệu [3], [4] và [7].

Định nghĩa 1.1 Toán tử A được gọi là

(i) toán tử đơn điệu *(monotone)* nếu

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in D(A); \tag{1.1}$$

(ii) toán tử đơn điệu chặt *(strictly monotone)* nếu trong bất đẳng thức (1.1) dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$;

(iii) toán tử đơn điệu đều *(uniformly monotone)* nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$ không giảm với $t \geq 0,\ \delta(0) = 0$ và

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq \delta\big(\|x - y\|\big),\ \forall x, y \in D(A);$$

Nếu $\delta(t) = c_A t^2$ với c_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu mạnh *(strongly monotone)*;

(iv) không giãn nếu

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Nhận xét 1.1. Nếu A là một toán tử tuyến tính thì tính đơn điệu tương đương với tính không âm của toán tử.

Ví dụ 1.1 Toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ được xác định bởi

$$A = B^T B,$$

với B là một ma trận vuông cấp M, là một toán tử đơn điệu.

Định nghĩa 1.2 Toán tử A được gọi là h-liên tục *(hemicontinuous)* trên X nếu $A(x+ty) \rightharpoonup A(x)$ khi $t \to 0$ với mọi $x, y \in X$ và được gọi là d-liên tục *(demicontinuous)* trên X nếu từ $x_n \to x$ suy ra $A(x_n) \rightharpoonup A(x)$ khi $n \to \infty$.

Ví dụ 1.2 Hàm hai biến:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)} & \text{nếu } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

là h-liên tục.

Định nghĩa 1.3 Toán tử A được gọi là toán tử bức *(coercive)* nếu

$$\lim_{||x|| \to +\infty} \frac{\langle A(x), x \rangle}{||x||} = +\infty, \ \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.4 Không gian Banach X được gọi là không gian Ephimov Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X từ sự hội tụ yếu ($x_n \rightharpoonup x$) và sự hội tụ chuẩn ($\|x_n\| \to \|x\|$) luôn kéo theo sự hội tụ mạnh ($\|x_n - x\| \to 0$).

Ví dụ 1.3 Không gian Hilbert là không gian có tính chất E-S.

Định nghĩa 1.5 Với $s \geq 2$, ánh xạ $J^s : X \longrightarrow 2^{X^*}$ (nói chung là đa trị) được định nghĩa bởi:

$$J^s(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|; \ \|x^*\| = \|x\|^{s-1}\}, \tag{1.2}$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian X. Khi $s = 2$ thì J^s được viết là J và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian X.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được cho trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1 (xem [4]) *Giả sử X là một không gian Banach. Khi đó,*

1) $J(x)$ là tập lồi, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$, với mọi $\lambda > 0$;

2) J là ánh xạ đơn trị khi và chỉ khi X^* là không gian lồi chặt. Trong trường hợp X là không gian Hilbert thì $J = I$-toán tử đơn vị trong X. Ánh xạ đối ngẫu là một trong những ví dụ về toán tử đơn điệu, nó tồn tại trong mọi không gian Banach.

Định lí 1.1 (xem [4]) *Nếu X^* là không gian Banach lồi chặt thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu, bức và d-liên tục. Hơn nữa, nếu X là không gian Banach lồi chặt thì J là toán tử đơn điệu chặt.*

Khái niệm toán tử đơn điệu còn được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ của toán tử A trong không gian tích $X \times X^*$, trong đó

$$Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\}.$$

Định nghĩa 1.6 Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in X,\ x^* \in A(x),\ y^* \in A(y).$$

Tập $Gr(A)$ được gọi là đơn điệu nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức trên. Nếu $Gr(A)$ không được chứa thực sự trong một tập đơn điệu nào khác trong $X \times X^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.

Từ định nghĩa này ta suy ra kết quả sau (xem [4]).

Mệnh đề 1.2 *Toán tử đơn điệu $A : X \to X^*$ là đơn điệu cực đại khi và chỉ khi từ bất đẳng thức*

$$\langle g - f, y - x_0\rangle \geq 0,\ \forall (y, g) \in Gr(A),$$

suy ra $x_0 \in D(A)$ và $f \in A(x_0)$.

Một ví dụ điển hình về toán tử đơn điệu cực đại là dưới vi phân của một hàm lồi.

Định nghĩa 1.7 Hàm $F : X \to \mathbb{R}$ được gọi là

(i) lồi trên X nếu với mọi $x, y \in X$ ta có

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y), \ \forall t \in [0,1]; \qquad (1.3)$$

(ii) lồi chặt trên X nếu bất đẳng thức trên không xảy ra dấu bằng với $x \neq y$;

(iii) nửa liên tục dưới trên X nếu

$$\liminf_{y \to x} F(y) \geq F(x), \ \forall x \in X;$$

(iv) nửa liên tục dưới yếu trên X nếu với mọi dãy $\{x_n\} : x_n \rightharpoonup x$ thì

$$\liminf_{n \to \infty} F(x_n) \geq F(x), \ \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.8 Cho X là không gian Banach thực phản xạ, $F : X \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm lồi, chính thường trên X. Ta định nghĩa $\partial F(x)$ bởi

$$\partial F(x) = \Big\{x^* \in X^* : F(x) - F(y) \leq \langle x - y, x^* \rangle, \ \forall y \in X\Big\}, \ \forall x \in X, \qquad (1.4)$$

Phần tử $x^* \in X^*$ được gọi là dưới Gradient của hàm F tại x và $\partial F(x)$ được gọi là dưới vi phân của F tại x.

Định lí 1.2 (xem [4]) *Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X. Nếu $F : X \to \mathbb{R}$ là hàm lồi chính thường, nửa liên tục dưới trên X, thì ánh xạ dưới vi phân ∂F là một toán tử đơn điệu cực đại từ X vào X^*.*

Toán tử A đơn điệu cực đại khi và chỉ khi miền ảnh của $A + \lambda J$ là toàn bộ không gian X^*, đó là nội dung của định lý sau.

Định lí 1.3 (xem [4]) *Cho X và X^* là các không gian Banach thực phản xạ và lồi chặt, $J : X \to X^*$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X, $A : X \to X^*$ là một toán tử đơn điệu. Khi đó A là toán tử đơn điệu cực đại nếu và chỉ nếu với mọi $\lambda > 0$, $R(A + \lambda J)$ là toàn bộ X^*.*

Định lý sau đây chỉ ra rằng bất cứ một toán tử đơn điệu, h-liên tục và bị chặn nào từ X vào X^* cũng đều là toán tử đơn điệu cực đại.