ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Phùng Thị Oanh

HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH GÓC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

.

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Những bài toán liên quan đến các hệ thức trong tam giác thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi, các đề thi Đại học. Số lượng các hệ thức trong tam giác trong các tài liệu dành cho học sinh phổ thông là rất lớn, vì vậy học sinh dễ bị choáng ngợp, cảm thấy khó khăn khi giải dạng bài toán này. Học sinh thường không biết bắt đầu từ đâu vì không thấy được mối liên hệ giữa các hệ thức lượng giác. Do đó cần có các phương pháp giúp học sinh phân loại và thấy được mối quan hệ giữa các hệ thức lượng giác trong tam giác. Như vậy số lượng các hệ thức lượng giác trong tam giác cần chứng minh sẽ giảm đi một cách đáng kể. Một trong các phương pháp phân loại và tạo ra hệ thức lượng giác trong tam giác là *phương pháp biến đổi tuyến tính góc*. Ý tưởng của phương pháp biến đổi tuyến tính góc là (xem [9]): Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc để tạo ra tam giác mới $A_1B_1C_1$ từ tam giác ABC. Từ một hệ thức đã biết cho tam giác $A_1B_1C_1$ ta sẽ có một hệ thức mới trong tam giác ABC.

Dạng tổng quát của phép biến đổi tuyến tính góc là:

$$\begin{gathered}A_1 = k_{11}A + k_{12}B + k_{13}C + \lambda_1\pi,\\ B_1 = k_{21}A + k_{22}B + k_{23}C + \lambda_2\pi,\\ C_1 = k_{31}A + k_{32}B + k_{33}C + \lambda_3\pi,\\ A_1 + B_1 + C_1 = \pi, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0.\end{gathered}$$

Hệ bốn phương trình và ba bất đẳng thức trên chứa 12 hệ số k_{ij}, λ_i $(i, j = 1, 2, 3)$. Do đó, bằng cách chọn các bộ hệ số, ta sẽ có rất nhiều phép biến đổi tuyến tính góc. Các phép biến đổi tuyến tính góc được khai thác trong luận văn là:

1) $A_1 = \dfrac{\pi - A}{2}, B_1 = \dfrac{\pi - B}{2}, C_1 = \dfrac{\pi - C}{2}$ ($\triangle A_1B_1C_1$ nhọn),

2) $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ (với $\triangle ABC$ nhọn),

3) $A_3 = \dfrac{A}{2}, B_3 = \dfrac{B}{2}, C_3 = \dfrac{\pi + C}{2}$ ($\triangle A_3B_3C_3$ tù có góc $C_3 > \dfrac{\pi}{2}$),

4) $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$ (với $\triangle ABC$ tù có $C > \dfrac{\pi}{2}$),

5) $A_5 = \dfrac{\pi}{2} - A, B_5 = \dfrac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$,...

Nội dung chính của luận văn gồm hai chương:

Chương 1 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản

Chương 1 đưa ra một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản nhằm tạo mới các hệ thức lượng giác trong tam giác. Các hệ thức trong tam giác được lựa chọn từ các đề thi học sinh giỏi, các tạp chí Toán học, các đề thi Đại học và sáng tạo những bài mới từ những bài đã có.

Chương 2 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng tổng quát.

Chương 2 xét các phép biến đổi tuyến tính góc dạng không đối xứng và sáng tạo ra những bài mới dựa trên những bài đã có. Một số phần trong nội dung luận văn đã được đưa vào trong [3] và được thông báo trong [1], [2]. Tất cả các bài tập đều được giải chi tiết trong [3]. Hy vọng Luận văn cũng cung cấp cho các Thầy giáo, các em học sinh một tài liệu về các hệ thức lượng trong tam giác theo phương pháp biến đổi tuyến tính góc, và thông qua đó, học sinh có thể sáng tạo ra nhiều hệ thức mới. Tác giả luận văn cũng hi vọng sẽ tiếp tục bổ sung và hoàn thiện thêm đề tài này trong quá trình giảng dạy toán ở trường phổ thông.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS-TS Tạ Duy Phượng. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới người Thầy rất nghiêm khắc và tận tụy với công việc, đã truyền thụ những kiến thức cũng như kinh nghiệm cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu đề tài. Tác giả xin cám ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học cùng các Thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học Toán K3 Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, các thầy cô tổ Toán - Tin trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc, bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã tạo điều kiện giúp đỡ, khích lệ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu một cách nghiêm túc trong suốt khóa học. Tuy nhiên, do hạn chế về thời gian, cũng như trình độ hiểu biết nên trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của các thầy cô giáo và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên 2011

Phùng Thị Oanh

Chương 1

Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản

Trong đại dương mênh mông các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác trong tam giác (và cả trong đại dương các sách về lượng giác hiện nay), chúng ta thường quan sát thấy những "cặp bài trùng", tức là chúng có vẻ rất giống nhau. Thí dụ, với mọi tam giác ta luôn có:
1) (Vô địch Cộng hoà dân chủ Đức, 1965)

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}; \tag{1.1}$$

2) (Đại học An ninh, 1996, Khối A)

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}; \tag{1.2}$$

3)

$$\cos\frac{A+3B}{4} + \cos\frac{B+3C}{4} + \cos\frac{C+3A}{4} \leq \frac{3}{2}; \tag{1.3}$$

4)

$$\cos\frac{\pi+A}{4} + \cos\frac{\pi+B}{4} + \cos\frac{\pi+C}{4} \leq \frac{3}{2}; \tag{1.4}$$

....

Giải thích như thế nào về sự giống nhau của các bất đẳng thức trên?- Có lẽ có nhiều cách giải thích. Với mỗi cách nhìn, ta có thể phát hiện ra những qui luật ẩn tàng bên trong sự giống nhau về vẻ ngoài của các hệ thức. Trong luận văn này, chúng tôi cố gắng giải thích sự giống nhau của những cặp bài trùng ấy dựa trên nhận xét sau đây: Thực chất các hệ thức lượng giác trên giống nhau là bởi vì chúng có thể nhận được từ nhau qua một biến đổi đại số, cụ thể là phép biến đổi tuyến tính của góc.

Chương 1 xét một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản.

1.1 Biến đổi tuyến tính góc dạng 1

$$A_1 = \frac{A+(n-1)B}{n}, B_1 = \frac{B+(n-1)C}{n}, C_1 = \frac{C+(n-1)A}{n}.$$

Mệnh đề 1.1. Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{A+(n-1)B}{n}, B_1 = \frac{B+(n-1)C}{n}, C_1 = \frac{C+(n-1)A}{n}$$

với $n = 2, 3, \ldots$ cũng là ba góc một tam giác.

Chứng minh Thật vậy, vì A, B, C là ba góc của tam giác nên
$0 < A, B, C < \pi$ và $A + B + C = \pi$.
Suy ra $0 < A_1 = \dfrac{A+(n-1)B}{n} < \dfrac{\pi+(n-1)\pi}{n} < \pi$.
Tương tự, $0 < B_1, C_1 < \pi$ và

$$A_1 + B_1 + C_1 = \frac{A+(n-1)B}{n} + \frac{B+(n-1)C}{n} + \frac{C+(n-1)A}{n} = \pi$$

Chứng tỏ A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.2. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{A+(n-1)C}{n}, B_1 = \frac{B+(n-1)A}{n}, C_1 = \frac{C+(n-1)B}{n}$$

với $n = 2, 3, \ldots$ cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.3. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{B+(n-1)C}{n}, B_1 = \frac{C+(n-1)A}{n}, C_1 = \frac{A+(n-1)B}{n}$$

với $n = 2, 3, \ldots$ cũng là ba góc của một tam giác.

Với $n = 2$ ta có

Hệ quả 1.1. Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Khi ấy $A_1 = \dfrac{B+C}{2}, B_1 = \dfrac{C+A}{2}, C_1 = \dfrac{A+B}{2}$ cũng là ba góc của một tam giác.

Chú ý 1.1. Vì $A_1 = \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\pi - A}{2}$ nên $0 < A_1 = \dfrac{\pi - A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ và phép biến đổi tuyến tính góc $A_1 = \dfrac{B+C}{2}, B_1 = \dfrac{C+A}{2}, C_1 = \dfrac{A+B}{2}$ cũng là phép biến đổi tuyến tính góc $A_2 = \dfrac{\pi - A}{2}, B_2 = \dfrac{\pi - B}{2}, C_2 = \dfrac{\pi - C}{2}$ và $A_2B_2C_2$ là tam giác có ba góc nhọn.

Nhận xét 1.1. Vì $A_1 = \dfrac{\pi - A}{2}$ nên $\sin A_1 = \sin\dfrac{\pi - A}{2} = \cos\dfrac{A}{2}$ ($\cos A_1 = \sin\dfrac{A}{2}, \tan A_1 = \cot\dfrac{A}{2}, \cot A_1 = \tan\dfrac{A}{2}$). Như vậy, từ một hệ thức chứa $\sin A_1$, $\sin B_1$, $\sin C_1$ (tương ứng, chứa $\cos A_1$, $\cos B_1$, $\cos C$; $\tan A_1$, $\tan B_1$, $\tan C_1$; $\cot A_1, \cot B_1, \cot C_1$ đúng cho tam giác $A_1B_1C_1$ ta sẽ suy ra một hệ thức chứa $\cos\dfrac{A}{2}, \cos\dfrac{B}{2}, \cos\dfrac{C}{2}$ (tương ứng, chứa $\sin\dfrac{A}{2}$, $\sin\dfrac{B}{2}, \sin\dfrac{C}{2}, \cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}, \tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2}, \tan\dfrac{C}{2}$) đúng cho tam giác ABC.

Sử dụng Nhận xét 1.1, từ một hệ thức lượng giác trong tam giác đã biết, ta có thể tạo ra ngay một (một số) hệ thức lượng giác khác mà không phải chứng minh theo cách truyền thống (biến đổi lượng giác). Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta luôn có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh Ta có

$\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - \cos A - \cos B - \cos C \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2\cos(B+C) - 2\cos B - 2\cos C \geq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow 3 + 2\cos B\cos C - 2\sin B\sin C - 2\cos B - 2\cos C \geq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow 1 + \sin^2 B + \cos^2 B + \sin^2 C + \cos^2 C + 2\cos B\cos C - 2\sin B\sin C - 2\cos B - 2\cos C \geq \mathbf{0}$, luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow 3-2\sin\frac{\pi-(B+C)}{2}-2\sin\frac{B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow 3-2\cos\frac{B+C}{2}-2\sin\frac{B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$-2(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})-2\sin\frac{B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2})^2+(1-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2})^2\ge 0$, luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_1=\frac{\pi-A}{2}, B_1=\frac{\pi-B}{2}, C_1=\frac{\pi-C}{2}$. Khi ấy A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác. Do đó Bài 1.1 đúng cho tam giác $A_1B_1C_1$. Vì $\cos A_1=\sin\frac{A}{2}, \cos B_1=\sin\frac{B}{2}, \cos C_1=\sin\frac{C}{2}$ nên ta có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos A_1+\cos B_1+\cos C_1\le\frac{3}{2}, \text{ (đpcm) .}$$

Lời bình: Chứng minh 2 (biến đổi tuyến tính góc) rất đơn giản và gần như không đòi hỏi kiến thức gì, ngoài công thức quan hệ lượng giác của hai góc phụ nhau.

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC có ba góc nhọn ta có

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\le\frac{1}{3}(\tan A\tan B\tan C).$$

Chứng minh Không mất tổng quát, giả sử $\frac{\pi}{2}>A\ge B\ge C>0$. Do tính đồng biến của hàm số tan và tính nghịch biến của hàm số cos trên khoảng