**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

---

**TẠ VĂN HOÀN**

# GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

# VÀ

# MỘT SỐ ỨNG DỤNG

**Chuyên ngành:** **PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
**Mã số:** **60.46.40**

**TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên – 2011**

**Công trình được hoàn thành tại**
**Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên**

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS ĐÀM VĂN NHỈ

Phản biện 1: PGS.TS LÊ THỊ THANH NHÀN
Phản biện 2: TS NGUYỄN MINH KHOA

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên
Ngày 22 tháng 11 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

# Gía trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

# và

# Một số ứng dụng

Tạ Văn Hoàn
Khoa Toán ĐHKH Thái Nguyên
*E-mail:tvhoanbs@gmail.com*

Ngày 1 tháng 9 năm 2011

# Mục lục

# MỞ ĐẦU

Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất hay tìm cực trị một biểu thức đã có từ lâu, nhưng luôn xuất hiện trong mọi lĩnh vực của toán học. Trong chương trình toán phổ thông, bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trải dài ở hầu hết các cấp học, có mặt ở tất cả các bộ môn Số học, Đại số, Giải tích, Hình học và Lượng giác. Đặc biệt, trong kỳ thi Đại học, Học sinh giỏi quốc gia và quốc tế thường có bài xác định cực trị một biểu thức nào đó. Bởi vậy, bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất là một trong số những bài toán được rất nhiều người thuộc nhiều lĩnh vực quan tâm đến.
Các bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất một biểu thức rất phong phú, đa dạng, đòi hỏi vận dụng nhiều kiến thức và vận dụng sao cho hợp lý, đôi khi rất độc đáo. Hơn nữa, bài toán xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất còn liên quan đến sự đánh giá, tìm cái chặn hoặc xét xem biểu thức sẽ có tính chất gì khi nó đạt cực trị. Chính vì thế, phương pháp xác định giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất một biểu thức sẽ rất thiết thực đối với những ai muốn tìm hiểu sâu về toán sơ cấp.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn toán ở bậc phổ thông, luận văn đã đặt vấn đề: Trình bày một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất một biểu thức. Qua đó luận văn cũng đưa ra việc vận dụng các kết quả đạt được để giải quyết một số bài toán liên quan.

Nội dung của luận văn được chia ra làm ba chương.
Chương I dành để giới thiệu khái niệm và một vài phương pháp chứng minh bất đẳng thức với các ví dụ tương thích. ChươngII dành để trình bày về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Đây là chương trọng tâm giới thiệu về các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Cụ thể mục 2.1 tập trung giới thiệu một số bài toán chọn lọc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng phương pháp bất đẳng thức. Mục 2.2 giới thiệu điều kiện đạt cực trị của hàm đa thức hai biến bậc hai và các ví dụ liên quan. Mục 2.3 giới thiệu phương pháp đạo hàm tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đối với hàm một biến, hàm lồi, hàm nhiều biến và các sáng tác bài tập tương ứng. Mục 2.4 giới thiệu một số bài toán tìm cự trị bằng phương pháp tọa độ điểm, tọa độ véc tơ hoặc dựa vào tính đặc biệt của hình học. Mục 2.5 giới thiệu một số bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất qua vận dụng các hàm lượng giác và trình bày phương pháp sáng tác

một số bài toán cực trị trong tam giác qua đa thức bậc ba.
Chương III tập trung trình bày một vài ứng dụng các kết quả đạt được. Như chứng minh lại các bất đẳng thức cổ điển qua việc vận dụng khái niệm cực trị tiếp theo giới thiệu các ứng dụng bài toán cực trị trong việc giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu xót nhất định và em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.
Luận văn đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.Ts. Đàm Văn Nhỉ. Em xin chân thành cám ơn thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn.

Em xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.

Tiếp theo, em xin chân thành cảm ơn các thầy cô phản biện đã đọc và góp ý kiến cho luận văn để em hoàn thiện luận văn của mình.

Lời cuối xin chúc sức khỏe tất cả các thầy các cô, chúc thầy cô luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ được giao.

Chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, Ngày 1 tháng 09 năm 2011.
Người thực hiện
Tạ Văn Hoàn

# Chương 1

# Phần chuẩn bị

## 1.1 Khái niệm và một vài tính chất của bất đẳng thức

**Định nghĩa 1.1.1.** Cho hai số thực $a$ và $b$. $a$ được gọi là *lớn hơn* $b$, ký hiệu $a > b$, nếu hiệu $a - b$ là một số dương; $a$ được gọi là *lớn hơn hoặc bằng* $b$, ký hiệu $a \geqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không âm; $a$ được gọi là *nhỏ hơn* $b$, ký hiệu $a < b$, nếu hiệu $a - b$ là một số âm; $a$ được gọi là *nhỏ hơn hoặc bằng* $b$, ký hiệu $a \leqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không dương.
*Giá trị tuyệt đối* của $a$ là $|a| = \begin{cases} a \text{ khi } a \geqslant 0 \\ -a \text{ khi } a < 0. \end{cases}$

**Tính chất 1.1.2.** *Với các số thực $a, b, c$ và số tự nhiên $n$ luôn có tính chất:*

$$\begin{aligned}
a > b &\iff a - b > 0 \\
a > b &\iff a + c > b + c \\
a > b &\iff a^{2n+1} > a^{2n+1} \\
|a| > |b| &\iff a^{2n} > a^{2n} \\
a \geqslant b &\iff \left[\begin{smallmatrix} a=b \\ a>b. \end{smallmatrix}\right. \\
\text{Với } a > b,\ c > 0 &\iff ac > bc \\
c < 0 &\iff ac < bc. \\
a > b, b > c &\implies a > c. \\
|a| \leqslant \alpha &\iff \begin{cases} \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha \leqslant a \leqslant \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi chứng minh bất đẳng thức, những đồng nhất thức thường được sử dụng:

**Mệnh đề 1.1.3.** *Với các số thực* $a, b, c, x, y, z$ *và* $d \neq 0$ *có các đồng nhất thức sau đây:*

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *và* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(ii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ *và* $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$.

(iv) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(v) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ *và* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

(vi) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$.

(vii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2$.

(viii) $|ab| = |a||b|, |\frac{a}{d}| = \frac{|a|}{|d|}$ *và* $|a| = |b|$ *khi và chỉ khi* $a = \pm b$.

Ba bổ đề dưới đây trình bày các bất đẳng thức thường được sử dụng sau này.

**Bổ đề 1.1.4.** *Với các số thực* $a, b, c, x, y, z$ *và* $d \neq 0$ *có các kết quả sau:*

(i) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

(ii) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqslant (ax+by)^2$.

(iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$.

(iv) $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$.

**Bài giải:** (i) Bởi vì $(a-b)^2 \geqslant 0$ nên $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$.
(ii) Do bởi $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \geqslant (ax+by)^2$ nên $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqslant (ax+by)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
(iii) Do $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqslant (ax+by+cz)^2$ nên $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.
(iv) Ta luôn có $|a| \geqslant \pm a, |b| \geqslant \pm b$. Khi $a+b \geqslant 0$ thì $|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$; còn khi $a+b < 0$ thì $|a+b| = -a-b \leqslant |a|+|b|$. Tóm lại $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Bởi

vì $|a| = |a+b+(-b)| \leqslant |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$ nên $|a| - |b| \leqslant |a+b|$. Tương tự $|b| = |a+b+(-a)| \leqslant |a+b| + |-a| = |a+b| + |a|$ nên $|b| - |a| \leqslant |a+b|$. Tóm lại $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$. $\square$

**Bổ đề 1.1.5.** *Với $a, b, c, x, y, z, u, v, t \geqslant 0$ luôn có các bất đẳng thức sau:*

(i) $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

(ii) $\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$.

(iii) $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$.

**Bài giải:** (i) Vì $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$ nên $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 4\sqrt[3]{abc}$ hay $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.
(ii) Nếu một trong ba số $a + x, b + y, c + z$ bằng 0, chẳng hạn $a + x = 0$, thì $a = x = 0$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét $a + x, b + y, c + z \neq 0$ :
Theo (i) ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{a+x} + \dfrac{b}{b+y} + \dfrac{c}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \\ \dfrac{x}{a+x} + \dfrac{y}{b+y} + \dfrac{z}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \end{cases}$ và cộng vế theo vế được $3 \geqslant 3\dfrac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}}$. Từ đây suy ra (ii).
(iii) Vì $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} + \sqrt[3]{uvt}$ nên $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$. $\square$

**Bổ đề 1.1.6.** *Cho ba số thực $a, b, c \geqslant 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

(i) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \geqslant 1$.

(ii) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \geqslant 1$.

(iii) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \leqslant 1$.

(v) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} + \dfrac{1}{(1+c)^2} \leqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \leqslant 1$.

(vi) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}}$ *và* $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}}$ *khi* $a,b,c\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**Bài giải:** (i) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)(a-b)^2\geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ab}$ khi $ab\geqslant 1$.

(ii) Vì $a,b,c\geqslant 1$ nên từ $\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ab}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\geqslant\dfrac{2}{1+bc}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{1}{1+a^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ca}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\geqslant\dfrac{3}{1+abc}$.

(iii) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)^2+ab(a-b)^2\geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\geqslant\dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) là hiển nhiên qua quy đồng hai vế.

(v) Vì $a,b,c\leqslant 1$ nên từ $\begin{cases}\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+ab}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+bc}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{(1+a)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+ca}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}\leqslant\dfrac{3}{1+abc}$.

(vi) Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ với $x>0$ có $y'=-x(1+x^2)^{-3/2}<0$. Vậy $y$ đơn điệu giảm. Ta lại có $y"=3x^2(1+x^2)^{-5/2}-(1+x^2)^{-3/2}=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}\geqslant 0$ khi $x\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và như vậy $y$ là hàm lồi. Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}}$