ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRẦN THỊ YẾN MAI

TÍNH CHẤT ĐẶC TRƯNG CỦA HÀM TỰA LỒI LIPSCHITZ ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2011

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRẦN THỊ YẾN MAI

TÍNH CHẤT ĐẶC TRƯNG CỦA HÀM TỰA LỒI LIPSCHITZ ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60.46.36**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - Năm 2011

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Mục lục

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Mở đầu

Lý thuyết giải tích lồi có nhiều ứng dụng trong toán học ứng dụng cũng như trong việc nghiên cứu các bài toán được mô hình hóa trong kinh tế và kĩ thuật.

Ta biết rằng một hàm f giá trị thực lồi thì mọi tập mức của f lồi, nhưng điều ngược lại không đúng. Từ nhận xét đó người ta đã ra lớp hàm $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tựa lồi nếu mọi tập mức của f là lồi. Như vậy f tựa lồi khi và chỉ khi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ và $\lambda \in [0,1]$.

Lớp các hàm tựa lồi có nhiều ứng dụng trong lý thuyết tối ưu hóa. Nhiều nghiên cứu đã cho ta các tính chất phong phú của hàm tựa lồi, đặc biệt là các tính chất đặc trưng qua tính tựa đơn điệu của đạo hàm, đạo hàm suy rộng hoặc jacobian suy rộng.

P. H. Sach [10] đã nghiên cứu các tính chất đặc trưng để một hàm véc tơ Lipschitz địa phương $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là K- tựa lồi vô hướng theo nghĩa: $\forall \eta \in K^+$ (nón cực không âm của nón lồi đóng K), $\eta^T f$ là hàm tựa lồi giá trị thực. Tác giả đã thiết lập các điều kiện cần và đủ để f là K- tựa lồi vô hướng dưới ngôn ngữ các khái niệm tựa đơn điệu của Jacobian suy rộng Clarke của f và các ánh xạ đa trị được xây dựng từ nón tiếp tuyến Bouligand, Clarke và nón tiếp tuyến trung gian (intermediate tangent cone) của đồ thị của $f(.) + K$. J. Benoist [3] đã thiết lập các tính chất đặc trưng để hàm véc tơ Lipschitz địa phương $f : C \to Y$ là K- tựa lồi theo nghĩa: với mọi $y \in Y$, tập mức dưới $\{x \in C : f(x) \leq_K y\}$ là lồi trong không gian Banach, K là nón lồi đóng trong Y. Các tiêu chuẩn được thiết lập dưới ngôn ngữ khái niệm K- tựa đơn điệu của đạo hàm theo phương suy rộng và jacobian suy rộng Clarke.

Luận văn trình bày các tính chất đặc trưng để một hàm véc tơ Lipschitz địa phương f là K- tựa lồi vô hướng của Sach [10] dưới ngôn ngữ các khái niệm tựa đơn điệu của jacobian suy rộng Clarke của f và các ánh xạ đa trị được xây dựng từ các nón tiếp tuyến Bouligand, trung gian, Clarke của đồ thị hàm $f(.) + K$, và các tính chất đặc trưng để hàm véc tơ Lipschitz địa phương f là K- tựa lồi của của Benoist [3] dưới ngôn ngữ K- tựa đơn điệu của đạo hàm theo phương suy rộng và jacobian suy rộng Clarke của f.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các điều kiện đủ để hàm véc tơ Lipschitz địa phương $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là K- tựa lồi vô hướng của Sach [10] dưới ngôn ngữ các khái niệm tựa đơn điệu của jacobian suy rộng Clarke của f và các ánh xạ đa trị được xây dựng từ các nón tiếp tuyến Bouligand, trung gian và Clarke của đồ thị hàm $f(.) + K$. Tính K- lồi của f được đặc trưng qua các khái niệm i- đơn điệu và s- đơn điệu thích hợp.

Chương 2 trình bày các tính chất đặc trưng để một hàm véc tơ Lipschitz địa phương là K- tựa lồi của Benoist [3]. Các tiêu chuẩn được trình bày dưới ngôn ngữ khái niệm K- tựa đơn điệu của đạo hàm theo phương suy rộng và jacobian suy rộng. Chú ý rằng một hàm là K- tựa lồi vô hướng là K- tựa lồi.

Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Đỗ Văn Lưu đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình trong suốt quá trình làm luận văn. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường Đại học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K3b đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, 20 tháng 10 năm 2011.

Tác giả

Trần Thị Yến Mai

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Chương 1

ĐẶC TRƯNG CỦA ÁNH XẠ K-TỰA LỒI VÔ HƯỚNG

Chương 1 trình bày các điều kiện cần và đủ để một hàm véc tơ Lipschitz địa phương $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là K- tựa lồi vô hướng. Các tiêu chuẩn được trình bày dưới ngôn ngữ các khái niệm tựa đơn điệu của jacobian suy rộng của f và các ánh xạ đa trị được xây dựng từ các nón tiếp tuyến Bouligand, trung gian, Clarke của đồ thị hàm đa trị $f(\cdot) + K$. Các kết quả trình bày trong chương này là của P. H. Sach [10].

1.1 Các khái niệm và kết quả bổ trợ

Trong chương này, ta sẽ sử dụng những kí hiệu và kết quả sau.

Một phần tử trong không gian Euclide $\mathbb{R}^m$ được đồng nhất với một véc tơ cột (tức là $m \times 1$- ma trận). Tích vô hướng của $\xi \in \mathbb{R}^m$ và $u \in \mathbb{R}^m$ được kí hiệu là $\xi^T u$ trong đó T là phép chuyển vị.

Cho một ánh xạ đa trị $f : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$; dom$F$ và gr$F$ kí hiệu là miền hữu hiệu và đồ thị của F:

$$\text{dom}F = \{x \in \mathbb{R}^m : F(x) \neq \emptyset\},$$
$$\text{gr}F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : y \in F(x)\}.$$

Ta sử dụng kí hiệu int$B$; co$B$; cl$B$ để kí hiệu phần trong, bao lồi, bao đóng của tập $B \subset \mathbb{R}^m$. Nếu $K \subset \mathbb{R}^n$ là nón lồi đóng và y, y' là hai điểm của $\mathbb{R}^n$, ta đặt $[y, y'] = \text{co}\{y, y',\}$ và viết $S(y, y',) \leq 0$ nếu và chỉ nếu $\min\{\eta^T y, \eta^T y'\} \leq 0$ với tất cả $\eta \in K^+$. Theo [12, Hệ quả 11.4.2], ta có

$$S(y, y') \leq 0 \Leftrightarrow [y, y'] \cap (-K) \neq \emptyset. \tag{1.1}$$

Cho $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^m$ và $\alpha \in \mathbb{R} := \mathbb{R}^1$. Ta định nghĩa

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, nếu $A \neq \emptyset$ và $B \neq \emptyset$,

$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$, nếu $A \neq \emptyset$,

Ta đặt $A + \emptyset = \emptyset + A = \emptyset$ và $\alpha\emptyset = \emptyset$.

Khi A là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}$, kí hiệu sup$A$ và inf$A$ là cận trên đúng và cận dưới đúng của A. Ta đặt

sup$A = -\infty$ và inf$A = +\infty$, nếu $A = \emptyset$.

Nếu $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}$ là một ánh xạ đa trị từ $\mathbb{R}^m$ vào tập số thực $\mathbb{R}$ thì inf$F$ là một hàm giá trị thực mở rộng định nghĩa bởi:

$$(\text{inf}F)(x) = \text{inf}F(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^m).$$

Tương tự đối với sup$F$.

Cho $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz địa phương. Kí hiệu $\partial^0 f_x$ là dưới vi phân Clarke của f tại x (xem [2]):

$$\partial^0 f_x = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \xi^T u \leq f^0(x, u)\ \forall u \in \mathbb{R}^m\}, \tag{1.2}$$

trong đó

$$f^0(x, u) = \lim_{x' \to x} \sup_{t \downarrow 0} t^{-1}[f(x' + tu) - f(x')]. \tag{1.3}$$

Theo [2],

$$f^0(x,u) = \max\{\xi^T u : \xi \in \partial^0 f_x\}. \tag{1.4}$$

Từ bây giờ ta giả sử rằng $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là một hàm Lipschitz địa phương. Jacobian suy rộng Clarke của f tại x, kí hiệu bởi Jf_x được định nghĩa trong [2] là bao lồi của một tập:

$$\{\lim \bigtriangledown f_{x_i} : x_i \to x, f \text{ là khả vi Freschet tại } x_i\},$$

trong đó $\bigtriangledown f_{x_i}$ kí hiệu Jacobian thông thường của f tại x_i và giới hạn của $\bigtriangledown f_{x_i}$ được lấy trong không gian các $(m \times n)$- ma trận . Chú ý rằng mọi phần tử A của Jf_x là một $m \times n$- ma trận. Khi $n = 1$, Jf_x là dưới vi phân Clarke của f tại x (xem [4, Mệnh đề 2.6.2]).

Với mọi $\eta \in \mathbb{R}^n$ ta có [4, Định lý 2.6.6].

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\partial^0(\eta^T f)_x = [Jf_x]^T \eta := \{A^T \eta : A \in Jf_x\}, \tag{1.5}$$

trong đó $A^T \eta$ kí hiệu tích của $m \times n$- ma trận A^T (chuyển vị của ma trận A) và $n \times 1$- ma trận η.

Cho $K \subset \mathbb{R}^n$ là một nón lồi đóng. Đồ thị của ánh xạ $f(.) + K$ được gọi là K- trên đồ thị của f và được kí hiệu là $epi_K f$. (Sau này ta bỏ kí hiệu dưới K cho đơn giản). Khi $n = 1, K = \mathbb{R}_+$ (nửa đường thẳng không âm) epif quy về định nghĩa thông thường của trên đồ thị của một hàm số.

Ta sẽ cần kết quả dưới đây nó là hệ quả đơn giản của một định lý tách [12, Hệ quả 11.4.2]:

$$y \in K \Leftrightarrow \eta^T y \geq 0 (\forall \eta \in K^+) \Leftrightarrow \eta^T y \geq 0 (\forall \eta \in K^+ \setminus \{0\}). \tag{1.6}$$

Kí hiệu $T^0(epif, (x, f(x)))$ (tương ứng $T(epif, (x, f(x))$) là nón tiếp tuyến Clarke (tương ứng nón Bouligand) của epif tại $(x, f(x))$. Ta cũng sử dụng nón tiếp tuyến trung gian (intermediate tangent cone) $T^b(epif, (x, f(x)))$.