Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và những ý kiến đóng góp quý báu của các giáo sư của Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, của các thầy cô giáo trong Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn theo sát động viên tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để có được điều kiện tốt nhất khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2010

Tác giả

Vũ Đình Chiến

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
I	ánh xạ đơn vị
$A \cap B$	A giao với B
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$a \sim b$	a tương đương với b
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

MỞ ĐẦU

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, $A : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu đơn trị. Xét phương trình toán tử loại I: với $f \in X^*$, tìm $x_0 \in X$ sao cho

$$A(x_0) = f. \tag{0.1}$$

Khi toán tử A không có tính chất đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh, bài toán (0.1) nói chung là một bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)* theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.

Nhiều bài toán của thực tiễn, khoa học, công nghệ, kinh tế... dẫn tới bài toán đặt không chỉnh. Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết bài toán đặt không chỉnh là các nhà toán học A. N. Tikhonov, M. M. Lavrentiev, V. K. Ivanov .... Do tính không ổn định của bài toán này nên việc giải số của nó gặp khó khăn. Lí do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến một sai số bất kỳ của nghiệm. Để giải loại bài toán này, ta phải sử dụng những phương pháp ổn định, sao cho khi sai số của các dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Năm 1963, A. N. Tikhonov [7] đã đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử (0.1) trong không gian Hilbert thực H dựa trên việc tìm phần tử cực tiểu $x_\alpha^{h,\delta}$ của phiếm hàm Tikhonov

$$F_\alpha^{h,\delta}(x) = \|A_h(x) - f_\delta\|^2 + \alpha\|x_* - x\|^2 \tag{0.2}$$

trong đó $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc vào h và δ, x_* là phần tử cho trước đóng vai trò là tiêu chuẩn chọn và (A_h, f_δ) là xấp xỉ của (A, f). Hai vấn đề cần được giải quyết ở đây là tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov và chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(h, \delta)$ thích hợp để phần tử cực tiểu $x^{h,\delta}_{\alpha(h,\delta)}$ dần tới nghiệm chính xác của bài toán (0.1) khi h và δ dần tới không.

Việc tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov sẽ gặp nhiều khó khăn trong trường hợp bài toán phi tuyến. Đối với lớp bài toán phi tuyến với toán tử đơn điệu $A : X \to X^*$, F. Browder [5] đưa ra một dạng khác của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Tư tưởng chủ yếu của phương pháp do F. Browder đề xuất là sử dụng một toán tử $B : X \to X^*$ có tính chất h-liên tục *(hemicontinuous)*, đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh. Bằng phương pháp này, Nguyễn Bường [6] đã xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử loại I (0.1) trên cơ sở giải phương trình

$$A_h(x) + \alpha B(x) = f_\delta. \tag{0.3}$$

Bản luận văn này nhằm mục đích trình bày phương pháp hiệu chỉnh cho phương trình toán tử loại I (0.1) trong không gian Banach phản xạ thực X dựa trên toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh. Trình bày phương pháp xây dựng nghiệm hiệu chỉnh hữu hạn chiều và một phương pháp lặp tìm nghiệm hiệu chỉnh.

Nội dung của luận văn gồm có phần mở đầu, hai chương, phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo. Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản nhất về toán tử đơn điệu, phương trình toán tử đặt không chỉnh, sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm của phương trình toán tử loại I. Trong chương 2, chúng tôi trình bày phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov cho phương trình toán tử loại I dựa trên toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh. Trình bày sự hội tụ và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh trên cơ sở tham số hiệu chỉnh được chọn tiên nghiệm. Chúng tôi cũng trình bày phương pháp xấp xỉ hữu hạn chiều nghiệm hiệu chỉnh và ở phần cuối của chương là một phương pháp lặp cho nghiệm hiệu chỉnh cùng với ví dụ minh họa.

Chương 1

Phương trình toán tử loại I

Trong chương này chúng tôi trình bày các khái niệm và kết quả cơ bản nhất về phương trình toán tử loại I với toán tử đơn điệu. Chúng tôi cũng trình bày khái niệm về bài toán đặt không chỉnh và đưa ra một vài ví dụ về phương trình toán tử đặt không chỉnh. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [4].

1.1. Toán tử đơn điệu

Cho $A : X \to X^*$ là toán tử đơn trị từ không gian Banach thực phản xạ X vào X^* với miền xác định là $D(A) \subseteq X$ (thông thường ta coi $D(A) \equiv X$ nếu không nói gì thêm) và miền giá trị (miền ảnh) $R(A)$ nằm trong X^*.

Định nghĩa 1.1.1. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in X.$$

A được gọi là đơn điệu chặt nếu dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$.

Khái niệm về toán tử đơn điệu cũng có thể được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ của toán tử A trong không gian tích $X \times X^*$, trong đó theo định nghĩa

$$Gr(A) = \{(x, y) : y = Ax\}.$$

Định nghĩa 1.1.2. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in X,\ x^* \in Ax,\ y^* \in Ay.$$

Tập $Gr(A)$ được gọi là tập đơn điệu nếu nó thoả mãn bất đẳng thức trên.

Định nghĩa 1.1.3. *Nếu $Gr(A)$ không bị chứa một tập đơn điệu nào khác trong $X \times X^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.*

Định nghĩa 1.1.4. *Nếu $\forall x \in X$ ta có $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ thì A được gọi là toán tử xác định không âm, kí hiệu là $A \geq 0$.*

⋆ ***Nhận xét:*** Nếu A là một toán tử tuyến tính trong không gian Banach X thì tính đơn điệu tương đương với tính xác định không âm của toán tử.

Ví dụ 1.1.1. Giả sử H là không gian Hilbert, $A : H \to H$ là toán tử không giãn, tức là

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Khi đó toán tử $I - A$ là toán tử đơn điệu, ở đây I là toán tử đơn vị trong không gian Hilbert H.

Ví dụ 1.1.2. Toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ được xác định bởi

$$A = B^T B,$$

với B là một ma trận vuông cấp M, là một toán tử đơn điệu.

Định nghĩa 1.1.5. *Toán tử A được gọi là đơn điệu đều, nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0$, $\delta(0) = 0$ và*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \delta(\|x - y\|), \quad \forall x, y \in X.$$

Nếu $\delta(t) = c_A t^2$ với c_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là *đơn điệu mạnh.*

Định nghĩa 1.1.6. *Toán tử A được gọi là h-liên tục (hemicontinuous) trên X nếu $A(x + ty) \rightharpoonup Ax$ khi $t \to 0$ với mọi $x, y \in X$ và A được gọi là d-liên tục (demicontinuous) trên X nếu từ $x_n \to x$ suy ra $Ax_n \rightharpoonup Ax$ khi $n \to \infty$.*

Ví dụ 1.1.3. Hàm hai biến:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^4)} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

liên tục theo từng biến riêng biệt tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại $(0,0)$. Do đó nó h-liên tục tại $(0,0)$.

⋆ ***Nhận xét:*** Một toán tử đơn điệu và h-liên tục trên X thì d-liên tục.

Định nghĩa 1.1.7. *Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là toán tử bức, nếu*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|} = \infty, \ \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.1.8. *Ánh xạ $U^s : X \to X^*$ (nói chung đa trị) xác định bởi*

$$U^s(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|^{s-1}.\|x\| = \|x\|^s, \ s \geq 2\}$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian X.

Khi $s = 2$ thì U^s thường được viết là U và được gọi là *ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc* của X.

⋆ ***Nhận xét:***

1) Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc chính là toán tử đơn vị I trong H.

2) Ánh xạ đối ngẫu là một trong những ví dụ về toán tử đơn điệu, nó tồn tại trong mọi không gian Banach.

Với $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ và Ω là một tập đo được của không gian $\mathbb{R}^n$ thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc U có dạng

$$(Ux)(t) = \|x\|^{2-p}|x(t)|^{p-2}x(t), \quad t \in \Omega.$$

Trong không gian $L^p(\Omega)$, ánh xạ đối ngẫu U^s có tính chất đơn điệu đều và liên tục Holder, vì

$$\langle U^s(x) - U^s(y), x - y\rangle \geq m_U\|x - y\|^s, \quad m_U > 0, \tag{1.1}$$

$$\|U^s(x) - U^s(y)\| \leq C(R)\|x - y\|^\nu, \quad 0 < \nu \leq 1, \tag{1.2}$$

ở đây $C(R)$ là một hàm dương và đơn điệu tăng theo $R = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ (xem [3]).

Định lý 1.1.1. (xem [4]) *Nếu X^* là không gian Banach lồi chặt thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $U : X \to X^*$ là toán tử đơn điệu, bức và d-liên tục. Hơn nữa, nếu X là không gian Banach lồi chặt thì U là toán tử đơn điệu chặt.*

Bổ đề 1.1.1. (xem [9]) *Cho X là một không gian Banach thực, $f \in X^*$ và A là một toán tử h-liên tục từ X vào X^*. Khi đó, nếu có*

$$\langle A(x) - f, x - x_0\rangle \geq 0, \ \forall x \in X,$$

thì $A(x_0) = f$.

Nếu A là một toán tử đơn điệu trên X thì điều kiện trên tương đương với

$$\langle A(x_0) - f, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Bổ đề 1.1.1 có tên là bổ đề Minty, tên một nhà toán học Mỹ, người đã chứng minh kết quả trên trong trường hợp không gian Hilbert. Sau này chính ông và Browder đã chứng minh độc lập trong không gian Banach.

Định nghĩa 1.1.9. *Cho X là không gian Banach phản xạ, $f : X \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm lồi, chính thường trên X.*

• *Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu*

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x), \quad \forall x \in X.$$