ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ ĐÀO

PHƯƠNG PHÁP GIẢI QUI HOẠCH TOÀN PHƯƠNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học

GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên – 2011

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Qui hoạch toàn phương là bài toán qui hoạch phi tuyến đơn giản nhất. Đó là bài toán tìm cực tiểu của một hàm bậc hai với các ràng buộc tuyến tính. Nếu dạng toàn phương xác định dương hay nửa xác định dương thì ta có bài toán qui hoạch toàn phương lồi, còn nếu dạng toàn phương không xác định thì ta có bài toán qui hoạch toàn phương không lồi. Các bài toán này quan trọng và rất được quan tâm nghiên cứu vì nhiều vấn đề nảy sinh trong kinh tế, tài chính, công nghiệp và kỹ thuật có thể diễn đạt như một bài toán qui hoạch toàn phương.

Luận văn trình bày nội dung bài toán qui hoạch toàn phương, nêu các điều kiện tối ưu (cần và đủ), lý thuyết đối ngẫu trong qui hoạch toàn phương lồi và đề cập tới hai phương pháp giải thông dụng: phương pháp giảm biến, phương pháp tập tích cực. Việc tìm hiểu chủ đề này là rất cần thiết và hữu ích giúp hiểu và vận dụng các phương pháp qui hoạch toàn phương vào các bài toán tối ưu khác.

Nội dung luận văn được chia thành bốn chương:

Chương 1 **"Kiến thức chuẩn bị"** nhắc lại vắn tắt một số kiến thức cơ sở cần thiết về giải tích lồi và bài toán tối ưu, trước hết là các khái niệm về tập afin, tập lồi, hàm lồi, hàm toàn phương cùng một số tính chất cơ bản của chúng. Một số cách phân tích ma trận ra thành thừa số (dạng Cholesky, dạng QR) cũng được đề cập tới. Các kiến thức này sẽ được sử dụng ở các chương sau khi giải bài toán qui hoạch toàn phương với ràng buộc tuyến tính.

Chương 2 **"Bài toán qui hoạch toàn phương"** đề cập tới bài toán qui hoạch toàn phương tổng quát. Đó là bài toán tìm cực tiểu của một hàm bậc hai (có thể không lồi) với các ràng buộc tuyến tính. Nêu các điều kiện tối ưu (cần và đủ) và trình bày một số kết quả chính trong lý thuyết đối ngẫu của qui hoạch toàn phương lồi, tương tự như quan hệ đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính.

Chương 3 **"Phương pháp khử biến số"** đề cập tới bài toán tối ưu với hàm mục tiêu bậc hai và ràng buộc đẳng thức tuyến tính. Nêu hai cách đưa bài toán đã cho về bài toán không ràng buộc: phương pháp khử biến số (hạ thấp thứ nguyên) và phương pháp khử suy rộng, dựa trên phân rã không gian thành tổng của hai không gian con bù nhau. Để giải bài toán không ràng buộc, ta dùng các phương pháp tìm cực tiểu tự do của hàm n biến số. Cách tìm các nhân tử Lagrange tương ứng với lời giải tối ưu của bài toán cũng được đề cập tới. Phương pháp này sẽ được sử dụng ở chương sau, khi xem xét cách giải qui hoạch toàn phương với ràng buộc bất đẳng thức tuyến tính.

Chương 4 **"Phương pháp tập tích cực"** trình bày phương pháp tập tích cực giải qui hoạch toàn phương với ràng buộc bất đẳng thức tuyến tính, bằng cách đưa về giải một dãy bài toán với ràng buộc đẳng thức tuyến tính, theo các phương pháp đã giới thiệu ở Chương 3. Tính hữu hạn của thuật toán được chứng minh cho bài toán qui hoạch toàn phương lồi.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn này mới chỉ đề cập tới những nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán qui hoạch toàn phương và phương pháp giải qui hoạch toàn phương, chưa đi sâu vào kỹ thuật lập trình thực thi thuật toán. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả xin trân trọng cảm ơn các các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các Phòng, Ban chức năng của Trường Cao đẳng Công nghiệp Việt Đức (Sông Công - Thái Nguyên) và tập thể bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 09/2011

Tác giả

Vũ Thị Đào

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày tóm tắt một số kiến thức cơ bản về tập afin, tập lồi, hàm lồi, hàm toàn phương; về điều kiện cần, điều kiện đủ đối với nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu phi tuyến và một số kiến thức về ma trận có liên quan. Nội dung trình bày trong chương này chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [2], [5].

1.1 TẬP AFIN VÀ TẬP LỒI

1.1.1 Tập afin.

Trước hết là những khái niệm liên quan đến tập afin:

Định nghĩa 1.1. Một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập afin* nếu

$$\forall a, b \in M,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a + (1-\lambda)b \in M,$$

tức là hễ M chứa hai điểm nào đó thì M chứa cả đường thẳng qua hai điểm ấy.

Một số tính chất cơ bản của các tập afin:

- Nếu M là tập afin thì $a + M = \{a + x :\ x \in M\}$ cũng là tập afin $\forall a \in \mathbb{R}^n$
- M là tập afin chứa gốc khi và chỉ khi M là một không gian con của $\mathbb{R}^n$
- Giao của một họ bất kỳ các tập afin cũng là một tập afin.

- Nếu $x^1, ..., x^k$ thuộc tập afin M thì mọi tổ hợp afin của các điểm này cũng thuộc M, nghĩa là
  $$x^i \in M (i = 1, ..., k),\ \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k \in M$$
- Một tập afin bất kỳ có dạng $M = \{x : \mathrm{Ax} = b\}$ với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Ngược lại, mọi tập có dạng trên đều là tập afin. (Đó là tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính).

Bao afin của một tập E là giao của tất cả các tập afin chứa E, ký hiệu aff(E). Đó là tập afin nhỏ nhất chứa E.

Từ các tính chất của tập afin suy ra:

$$x \in \mathrm{aff}(E) \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i,\ x^i \in E,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Có thể thấy: một tập $M \neq \emptyset$ là afin khi và chỉ khi $M = x^0 + L$ với $x^0 \in M$ và L là một không gian con. L được xác định một cách duy nhất và được gọi là không gian con *song song* với M. (M nhận được bằng cách tịnh tiến L tới x^0).

Thứ nguyên (hay *số chiều*) của một tập afin M, ký hiệu *dim M*, được định nghĩa là số chiều của không gian con song song với nó.

Định nghĩa 1.2. Một tập afin trong $\mathbb{R}^n$ có thứ nguyên $n - 1$ được gọi là một *siêu phẳng*. Có thể thấy siêu phẳng là tập có dạng $H = \{x :< a, x >= \alpha\}$ với $a \in \mathbb{R}^n$ (Đó là tập nghiệm của một phương trình tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$).

Một tập k điểm $x^1, x^2, ..., x^k$ gọi là *độc lập afin* nếu $k - 1$ véctơ $x^2 - x^1, ..., x^k - x^1$ độc lập tuyến tính. Qua n điểm độc lập afin trong $\mathbb{R}^n$ có một siêu phẳng duy nhất. Một tập có dạng $H = \{x :< a, x > \leq \alpha\}$ (hay $H = \{x :< a, x >< \alpha\}$) được gọi là một *nửa không gian* đóng (mở).

1.1.2 Tập lồi.

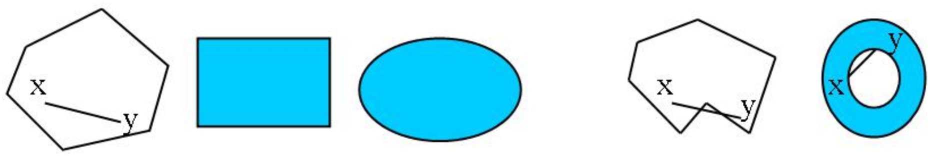
Sau đây là một số khái niệm liên quan đến tập lồi.

Định nghĩa 1.3. Tập hợp $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *lồi* nếu

$$\forall a, b \in C,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda) b \in C$$

tức là hễ C chứa hai điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm ấy.

Ví dụ 1.1 (về tập lồi). Tập hợp rỗng, toàn không gian $\mathbb{R}^n$, mọi tập afin, siêu phẳng, nửa không gian (đóng, mở), hình cầu, ... đều là những tập lồi. Trong $\mathbb{R}^2$, các hình tam giác, hình vuông, hình tròn, hình elip đều là các tập hợp lồi. Tuy nhiên, đường tròn hay hình vành khăn không phải là tập hợp lồi.



Hình 1.1. a) Các tập hợp lồi b) Các tập hợp không lồi

Thứ nguyên hay *số chiều* của một tập lồi C là thứ nguyên của bao afin của C. Trong $\mathbb{R}^n$ một tập lồi thứ nguyên n được gọi là tập lồi *thứ nguyên đầy đủ.*

Sau đây là một số tính chất cơ bản của các tập lồi:

- Giao của một họ bất kỳ các tập lồi cũng là một tập lồi.
- Nếu C, D là tập lồi thì $C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}$, $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ và $C - D = C + (-1)D$ cũng là tập lồi. Nếu $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ là các tập lồi thì tích $C \times D = \{(x, y) : x \in C, y \in D\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ cũng là tập lồi.
- Tập hợp tất cả các *tổ hợp lồi* của một số hữu hạn điểm trong $\mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Nếu $x^1, x^2, ..., x^k$ thuộc một tập lồi C thì mọi tổ hợp lồi của các điểm này cũng thuộc C, nghĩa là
$$x^i \in C,\ \lambda_i \geq 0\,(i = 1, ..., k)\,,\ \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$$
$$\Rightarrow \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k \in C.$$
- Một tập hợp lồi có thể giới nội hoặc không giới nội. Nếu tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$ không giới nội thì có véctơ $t \subset \mathbb{R}^n (t \neq 0)$ sao cho với mọi $x \in C$ tia $x + \lambda t, \lambda \geq 0$ nằm trọn trong C. Một véctơ t như thế gọi là một *phương vô hạn* của tập lồi C.

Cho một tập bất kỳ $E \subset \mathbb{R}^n$. Giao của tất cả các tập lồi chứa E được gọi là *bao lồi* của E, ký hiệu $conv(E)$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E. Có thể thấy:

- $conv(E)$ trùng với tập tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc E.
- Bao đóng của một tập lồi cũng là tập lồi.

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Điểm $x \in C$ gọi là *điểm cực biên* của C nếu x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của hai điểm phân biệt bất kỳ khác của C, nghĩa là không tồn tại hai điểm $y, z \in C, y \neq z$ sao cho

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z \text{ với } 0 < \lambda < 1$$

Định lý 1.1 (*Định lý tách*). Cho hai tập hợp lồi $C, D \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng và không có điểm chung ($C \cap D = \emptyset$). Khi đó, có thể tách chúng bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại véctơ $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$t^T x \geq a \geq t^T y \text{ với mọi } x \in C \text{ và mọi } y \in D.$$

1.2 HÀM TOÀN PHƯƠNG VÀ HÀM LỒI

1.2.1 Ma trận xác định dương

Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa và một số tính chất về ma trận.

Định nghĩa 1.4. Ma trận vuông, đối xứng C (cấp n) gọi là *xác định dương* nếu $x^T C x > 0$ với mọi $x \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$), gọi là *nửa xác định dương* (hay *xác định không âm*) nếu $x^T C x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Ma trận C gọi là *xác định âm* (hay *nửa xác định âm*) nếu $-C$ là xác định dương (nửa xác định dương).

Mệnh đề 1.1. *Một tử thức chính bất kỳ của ma trận xác định dương (nửa xác định dương) là ma trận xác định dương (nửa xác định dương).*

Hệ quả 1.1. *Các phần tử trên đường chéo chính của một ma trận xác định dương (nửa xác định dương) là dương (không âm).*

Mệnh đề 1.2. *Nếu C nửa xác định dương và $x^T Cx = 0$ thì $Cx = 0$*

Mệnh đề 1.3.*Nếu ma trận C xác định dương thì ma trận nghịch đảo C^{-1} tồn tại và xác định dương.*

Mệnh đề 1.4. *Nếu A là một ma trận tuỳ ý (vuông hay chữ nhật) thì AA^T và $A^T A$ là các ma trận nửa xác định dương* (T là ký hiệu chuyển vị ma trận).

Mệnh đề 1.5.*Ma trận đối xứng, luỹ đẳng là ma trận nửa xác định dương.*

1.2.2 Hàm toàn phương và hàm lồi

Định nghĩa 1.5. *Hàm toàn phương* (hay *dạng toàn phương*) là một hàm số có dạng

$$f(x) = x^T Cx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j,$$

trong đó $C = [c_{ij}]$ là ma trận vuông, đối xứng cấp n cho trước (tuỳ ý).

Dạng toàn phương $f(x) = x^T Cx$ gọi là *xác định dương* nếu $x^T Cx > 0$ với mọi $x \neq 0$, nghĩa là C là ma trận xác định dương.

Ví dụ 1.2. Dạng toàn phương $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ là xác định dương $(n = 2)$.

Dạng toàn phương gọi là *nửa xác định dương* nếu $x^T Cx \geq 0$ với mọi x và tồn tại ít nhất một $x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ sao cho $x^T Cx = 0$, nghĩa là C là ma trận nửa xác định dương, nhưng không xác định dương.

Ví dụ 1.3. Dạng toàn phương $f(x) = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ với mọi x_1, x_2 và bằng 0 khi $x_1 = x_2 = 1$, vì thế $f(x)$ là nửa xác định dương.

Dạng toàn phương $f(x) = x^T Cx$ gọi là *xác định âm (nửa xác định âm)* nếu $-f(x)$ là xác định dương (nửa xác định dương).

Với các dạng toàn phương có ít biến (n nhỏ) ta có thể kiểm tra tính xác định dương của nó nhờ dùng tính chất sau đây (mạnh hơn Mệnh đề 1.1).

** Dạng toàn phương $f(x) = x^T Cx$ là xác định dương khi và chỉ khi*