

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN ĐỨC

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC NỘI TIẾNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc

Thái Nguyên - 2011

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc

Phản biện 1: GS. TSKH. Hà Huy Khoái - Viện Toán học.

Phản biện 2: PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhân - Trường Đại học
Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Ngày 09 tháng 09 năm 2011

Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu	5
Chương 1. Tam giác	8
1.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác	8
1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras	8
1.2.1. Định lý Thales	8
1.2.2. Định lý Pythagoras	11
1.3. Định lý hàm số sin và định lý hàm số cosin	13
1.3.1. Định lý hàm số sin	13
1.3.2. Định lý hàm số cosin	13
1.3.3. Bài toán	14
1.4. Định lý Stewart và áp dụng	15
1.4.1. Định lý Stewart	15
1.4.2. Định lý đường trung tuyến	16
1.4.3. Định lý về đường phân giác	17
1.4.4. Công thức góc chia đôi	18
1.5. Công thức về diện tích của tam giác và áp dụng	21
1.5.1. Công thức về diện tích của tam giác	21
1.5.2. Tỷ số diện tích hai tam giác	23
1.5.3. Bài toán	23
1.6. Tam giác Pedal	28
1.6.1. Pedal bất kỳ	28
1.6.2. Pedal trực tâm	29
1.6.3. Pedal tâm nội tiếp	32
Chương 2. Tứ giác	35
2.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản	35
2.2. Định lý Ptolemy và các mở rộng	38

2.2.1.	Định lý Ptolemy	38
2.2.2.	Bất đẳng thức Ptolemy	39
2.2.3.	Định lý Bretschneider	40
2.2.4.	Định lý Casey	41
2.2.5.	Định lý Carnot	42
2.2.6.	Bài toán	42
2.3.	Tứ giác đặc biệt	46
2.3.1.	Tứ giác nội tiếp đường tròn	46
2.3.2.	Tứ giác ngoại tiếp đường tròn	50
2.3.3.	Tứ giác đồng thời nội và ngoại tiếp	55
2.3.4.	Tứ giác với những đường chéo vuông góc	56
2.4.	Công thức diện tích của tứ giác	57
2.4.1.	Công thức diện tích của tứ giác nội tiếp	57
2.4.2.	Công thức diện tích của tứ giác ngoại tiếp	58
2.4.3.	Công thức diện tích của tứ giác đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp	58
2.4.4.	Công thức diện tích của tứ giác lồi bất kỳ	59
2.5.	Tứ giác điều hoà và tính chất	60
2.5.1.	Hàng điểm điều hoà	60
2.5.2.	Tứ giác điều hoà	60
2.5.3.	Tính chất của tứ giác điều hoà	61
2.5.4.	Bài toán	63
Chương 3. Các đường thẳng đồng quy		67
3.1.	Định lý Ceva	67
3.2.	Một số mở rộng của định lý Ceva trong mặt phẳng	68
3.2.1.	Định lý Ceva dạng sin	68
3.2.2.	Mở rộng định lý Ceva trong mặt phẳng	69
3.3.	Mở rộng định lý Ceva trong không gian	71
3.3.1.	Định lý Ceva trong không gian	71
3.3.2.	Hệ quả của định lý Ceva trong không gian	72
3.4.	Các điểm đặc biệt trong tam giác	73
3.4.1.	Các điểm đặc biệt quen biết	73

3.4.2. Một số điểm đặc biệt khác	73
3.5. Bài toán	75
Chương 4. Các điểm thẳng hàng	83
4.1. Định lý Menelaus	83
4.2. Mở rộng định lý Menelaus trong mặt phẳng	84
4.2.1. Mở rộng định lý Menelaus trong tam giác	84
4.2.2. Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích	84
4.2.3. Mở rộng Định lý Menelaus trong tứ giác	85
4.3. Mở rộng định lý Menelaus trong không gian	86
4.3.1. Mặt phẳng phân giác góc nhị diện	86
4.3.2. Định lý Menelaus trong không gian	86
4.4. Định lý Desargues và Định lý Pappus	87
4.4.1. Định lý Desargues	87
4.4.2. Định lý Pappus	88
4.5. Tam giác phối cảnh	88
4.6. Bài toán	89
Chương 5. Đường tròn	95
5.1. Phương tích của một điểm - Trục đẳng phương	95
5.1.1. Định lý về các dây cung cắt nhau	95
5.1.2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn	95
5.1.3. Trục đẳng phương và tâm đẳng phương	99
5.2. Định lý Euler	100
5.2.1. Đường thẳng Euler	100
5.2.2. Đường tròn Euler	102
5.2.3. Công thức Euler	103
5.3. Đường tròn Apolonius	105
5.4. Định lý Simson	108
5.5. Định lý Steiner	111
5.5.1. Đường thẳng Steiner	111
5.5.2. Định lý Steiner	111
5.6. Định lý Pithot	113

5.7. Định lý Miquel	113
5.8. Định lý Brianchon	114
5.9. Định lý Pascal và Định lý Newton	115
5.9.1. Định lý Pascal	115
5.9.2. Định lý Newton	117
5.10. Định lý The'bault	117
Kết luận	119

Mở đầu

Các định lý Thales (Talet), Pythagoras (Pitago), định lý về đường phân giác, định lý đường trung tuyến, định lý hàm số cosin, định lý hàm số sin... là những định lý cơ bản của hình học phẳng đã được giới thiệu trong sách giáo khoa hình học bậc phổ thông ở hầu hết các quốc gia.

Nhiều tính chất đẹp và quan trọng khác của hình học phẳng được giới thiệu chủ yếu dưới dạng các bài toán nâng cao, hay các bài toán của các kỳ Olympic. Để giải các bài toán này thường phải vận dụng các định lý như định lý Ptolemy (Ptôlêmê) về tứ giác nội tiếp, định lý Ceva (Xêva) về các đường thẳng đồng quy trong tam giác, định lý Menelaus (Mênêlauys) về các điểm thẳng hàng, định lý Simson (Simson), định lý Euler (Ôle), định lý Brianchon, định lý Newton (Niuton)...

Các tính chất này rải rác được giới thiệu trong các tài liệu dành cho các học sinh giỏi. Nhiều chuyên gia và tài liệu nước ngoài đã gọi các định lý nói trên là **"Famous geometry theorems" - "Các định lý hình học nổi tiếng"**. Hiện nay tài liệu bằng Tiếng Việt về các định lý hình học nổi tiếng chưa có nhiều và còn tản mạn. Cần thiết phải giới thiệu các định lý trên và những áp dụng của chúng một cách đầy đủ hơn.

Vì vậy, việc tìm hiểu sâu thêm và giới thiệu **Các định lý hình học nổi tiếng** là cần thiết cho công việc học tập và giảng dạy toán học ở bậc phổ thông. Bản luận văn **"Một số định lý hình học nổi tiếng và áp dụng"** được tiến hành vào giữa năm 2010 chủ yếu dựa trên các tài liệu [3,7-9], trong đó tài liệu [3] chúng tôi mới được làm quen từ tháng 3 năm 2011.

Bản luận văn **"Một số định lý hình học nổi tiếng và áp dụng"** gồm có: Mở đầu, năm chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Tam giác.

Chương này trình bày các định lý cơ bản của hình học phẳng đã được dạy ở bậc trung học cơ sở và trung học phổ thông như định lý Thales, định lý Pythagoras, định lý đường phân giác, định lý Stewart, định lý Appollonius-Pappus, định lý hàm số sin, hàm số cosin, các công thức về diện tích tam giác...Khác với nhiều tài liệu về hình học sơ cấp, bản luận văn này đã giới thiệu cách chứng minh đơn giản các định lý Thales, Pythagoras và định lý Stewart. Chương này còn trình bày về tam giác pedal, trong đó pedal trực tâm là sự tìm tòi của tác giả. Chương này cũng trình bày 17 bài toán về áp dụng các định lý nói trên.

Chương 2 . Tứ giác.

Chương này trình bày một số định lý liên quan đến tứ giác và các bài toán áp dụng. Đó là định lý Ptolemy, định lý Bretschneider, định lý Casey, định lý Canot. Chương này còn đề cập đến tứ giác đặc biệt như tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp, tứ giác đồng thời ngoại và nội tiếp, tứ giác điều hoà, trong đó 10 tính chất về tứ giác ngoại tiếp là sự tìm tòi của tác giả bản luận văn. Trong chương này tôi giới thiệu 20 bài toán áp dụng các định lý liên quan đến tứ giác.

Chương 3. Các đường thẳng đồng quy.

Chương này trình bày các kiến thức về đường thẳng đồng quy, đặc biệt là định lý Ceva với các mở rộng trên mặt phẳng và trong không gian. Chương này cũng giới thiệu một số điểm đặc biệt trong tam giác được tạo nên bởi các đường thẳng đặc biệt đồng quy. Trong chương này trình bày 11 bài toán liên quan đến các đường thẳng đồng quy, trong đó đa phần được trích ra từ các đề thi vô địch Quốc tế và Việt Nam.

Chương 4. Các điểm thẳng hàng.

Chương này trình bày các kiến thức liên quan đến các điểm thẳng hàng, đặc biệt là định lý Menelaus và các mở rộng trong tứ giác, trong không gian. Chương này còn giới thiệu định lý Desargues, định lý Pappus và 10 bài toán liên quan đến các điểm thẳng hàng.

Chương 5. Đường tròn.

Chương này giới thiệu một số định lý hình học nổi tiếng liên quan đến đường tròn như định lý Euler về đường tròn Euler, định lý Simson về đường thẳng Simson, định lý Steiner, định lý Newton, định lý Brianchon và một số định lý khác. Trong chương đã trình bày 16 bài toán liên quan đến đường tròn.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy hướng dẫn, tới các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K3 - Trường Đại học Khoa học đã động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và đồng nghiệp của trường THPT Hùng An, trường THPT Đồng Yên - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện về mọi mặt để tác giả được tham gia học tập và hoàn thành khoá học.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 06 năm 2011

Tác giả

Vũ Văn Đức

Chương 1

Tam giác

1.1. Kí hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác

Kí hiệu $\triangle ABC$ là tam giác ABC với các đỉnh là A, B, C . Để thuận tiện, độ lớn của các góc ứng với các đỉnh A, B, C cũng được kí hiệu tương ứng là A, B, C .

Độ dài các cạnh của tam giác: $BC = a, CA = b, AB = c$.

Nửa chu vi của tam giác: $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Đường cao với các cạnh: h_a, h_b, h_c .

Đường trung tuyến với các cạnh: m_a, m_b, m_c .

Đường phân giác với các cạnh: l_a, l_b, l_c .

Bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r .

Bán kính đường tròn bàng tiếp các cạnh: R_a, R_b, R_c .

Diện tích tam giác ABC : $S = S_{ABC}$ hay $[ABC]$.

Hệ thức về góc:

$$A + B + C = 180^\circ (\pi).$$

Hệ thức về cạnh:

$$|b - c| < a < b + c; \quad |c - a| < b < c + a; \quad |a - b| < c < a + b.$$

Công thức tính diện tích tam giác. Diện tích tam giác bằng một nửa tích của một cạnh với đường cao tương ứng:

$$[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras

1.2.1. Định lý Thales

Thales và Pythagoras là hai nhà toán học xa xưa nhất mà lịch sử Toán học còn ghi lại được. Thales sinh trước Pythagoras nửa thế kỷ, từng là thầy dạy của Pythagoras và đã đánh giá rất cao tài năng của cậu học trò nhỏ tuổi. Thales sinh khoảng năm 620 và mất khoảng năm