

# QUY HOẠCH ĐA MỤC TIÊU TUYỂN TÍNH

TS Nguyễn Văn Minh

Ngày 16 tháng 3 năm 2009

# Nội dung

Trong thực tế ta cũng hay gặp những bài toán, trong đó cần cân nhắc, so sánh giữa nhiều mục tiêu khác nhau. Các mục tiêu đó thường xung đột với nhau, làm tốt hơn mục tiêu này dẫn tới làm xấu đi một ít nhất một mục tiêu khác, vì thế khó có giải pháp đạt tối ưu đồng thời cho tất cả các mục tiêu này. Chẳng hạn, ngoài mục tiêu giảm chi phí, hạ giá thành sản phẩm hay thu lợi nhuận tối đa, người ta còn quan tâm tới việc bình ổn giá cả, đa dạng hóa sản phẩm, duy trì mức lợi nhuận, ổn định lực lượng lao động, nâng cao đời sống người lao động, nâng cao uy tín xí nghiệp, v.v... Qui hoạch đa mục tiêu sẽ cung cấp công cụ giải quyết vấn đề này. Giải bài toán tối ưu đa mục tiêu là tìm ra phương án khả thi tốt nhất theo nghĩa nào đó. Bài toán tối ưu đa mục tiêu mà có các ràng buộc là tuyến tính và các hàm mục tiêu  $z_i = z_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1..p$  cũng là các hàm tuyến tính xác định trên miền  $D \subset R^n$ , thì được gọi là bài toán quy hoạch đa mục tiêu tuyến tính.

## Bài toán:

$$f = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min(\max)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

trong đó:  $A$  là ma trận có cấp  $m \times n$ ,  $C$  là ma trận có cấp  $p \times n$ ,  $\mathbf{b} \in R^m$  Các hàng của ma trận  $C$  chính là các véc tơ gradient của các hàm mục tiêu

$$z_i = \mathbf{c}_i \mathbf{x}, \quad i = 1..p$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\ z_2 &= x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \end{aligned} \quad \text{với miền ràng buộc } D = \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ta đưa vào}$$

các ma trận-véc tơ sau:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2); \mathbf{b} = (60, 48)^T$$

Ta viết lại bài toán trên:  $C\mathbf{x} \rightarrow \max; A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  Sau đây sẽ nêu hai cách tiếp cận chính cho bài toán tối ưu đa mục tiêu: tiếp cận theo mục tiêu và tiếp cận tối ưu Pareto.

# Cách tiếp cận mục tiêu

Nội dung của cách tiếp cận này là qui định cho mỗi mục tiêu một mức bằng số cụ thể, tiếp đó xác định các hệ số phạt do phạm vi mức qui định này và cuối cùng là tìm phương án đạt cực tiểu tổng độ lệch của các giá trị mục tiêu so với mức đã qui định cho từng mục tiêu, tổng được tính với trọng số là các hệ số phạt đã xác định.

Người ta chia ra làm ba dạng mức mục tiêu:

- a) **Cận dưới (mức một phía)**: qui định giới hạn dưới cho giá trị mục tiêu cần đạt tới (đạt cao hơn mức này càng tốt).
- b) **Mức hai phía**: Qui định giá trị mà mục tiêu cần đạt được (không hơn không kém).
- c) **Cận trên (mức một phía)**: qui định giới hạn trên mà giá trị hàm mục tiêu không được vượt quá (đạt thấp hơn mức này càng tốt).

Theo các cách tiếp cận này, các bài toán nhiều mục tiêu được phân loại theo mức độ quan trọng của mục tiêu. Người ta thường chia ra làm hai loại bài toán: *qui hoạch nhiều mục tiêu không ưu tiên* và *qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên*.

Trong các bài toán thuộc loại thứ nhất, các mục tiêu đều có tầm quan trọng như nhau, không phân biệt cái nào quan trọng hơn cái nào. Còn trong dạng bài toán thứ hai, các mục tiêu được phân cấp theo các mức ưu tiên khác nhau: ưu tiên 1, ưu tiên 2,... Mục tiêu có mức ưu tiên cao hơn sẽ được chú ý hơn

# Quy hoạch mục tiêu không ưu tiên

Để cho dễ hiểu, ta xét ví dụ cụ thể sau: Một xí nghiệp dự kiến đưa vào sản xuất ba loại sản phẩm mới kí hiệu là A, B, C để thay thế cho các mẫu sản phẩm cũ sắp ngừng sản xuất. Chủ xí nghiệp muốn cân nhắc ba mục tiêu chính: lợi nhuận, lao động và vốn đầu tư.

Cụ thể:

- 1) Cần đạt được lợi nhuận tối thiểu là 125 triệu đồng từ các sản phẩm mới này.
- 2) Cố gắng duy trì đội ngũ lao động hiện có ở mức là 4000 người.
- 3) Giữ mức đầu tư vốn không vượt quá 55 triệu đồng.

Chủ xí nghiệp nhận thấy rằng không có khả năng đạt được đồng thời tất cả ba mục tiêu này. Vì thế, sau khi bàn bạc với phòng kế hoạch, ông ta quyết định đưa ra các hệ số phạt như sau: 5 trên 1 triệu đồng lợi nhuận đạt thấp hơn mức quy định, 2 trên 100 lao động sử dụng thêm, 4 trên 100 lao động dôi dư (không sử dụng) và 3 trên 1 triệu đồng vốn đầu tư tăng thêm. Giả sử rằng mức lợi nhuận, số lao động và mức vốn đầu tư tỉ lệ thuận với mức sản xuất sản phẩm. Các số liệu định mức được cho trong Bảng 1 cùng với mức mục tiêu và hệ số phạt.

**Bảng:** Số liệu cho bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu không ưu tiên

Mục tiêu	Sản phẩm			Mục tiêu	Hệ số phạt
	A	B	C		
Lợi nhuận	12	9	15	$\geq 125$ (triệu đồng)	5
Lao động	5	3	4	$= 40$ ( $\times 100$ 1 đ)	2(+), 4(-)
Vốn đầu tư	5	7	8	$\leq 55$ ( triệu đồng)	3

## Ví dụ

Trong bài toán nêu trên có đủ cả 3 dạng mục tiêu: cận dưới (lợi nhuận), mức hai phía (lao động) và cận trên vốn (vốn đầu tư). Gọi  $x_1, x_2, x_3$  lần lượt là số sản phẩm A, B, C cần sản xuất. Ta thấy các mục tiêu nêu trên có thể diễn đạt như sau:

$$12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125 \quad (\text{lợi nhuận})$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40 \quad (\text{lao động})$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55 \quad (\text{vốn đầu tư})$$

Nếu kí hiệu Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu nêu trên với các hệ số phạt đã cho ở cột cuối Bảng 1, thì mục tiêu tổng thể là tìm các biến số  $x_1, x_2, x_3$  sao cho làm cực tiểu lượng phạt này.

Để diễn đạt chính xác hơn, ta thêm vào các biến số phụ  $y_1, y_2, y_3$  như sau:

$$y_1 = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125 \quad (\text{lợi nhuận trừ mức quy định}).$$

$$y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40 \quad (\text{lao động trừ mức quy định}).$$

$$y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55 \quad (\text{vốn đầu tư trừ mức quy định}).$$

## Ví dụ (tiếp)

Do mỗi  $y_j$  có thể dương hay âm, nên ta thay mỗi biến này bởi hiệu hai biến không âm:

$$y_1 = y_1^+ - y_1^- \quad \text{với } y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0.$$

$$y_2 = y_2^+ - y_2^- \quad \text{với } y_2^+ \geq 0, y_2^- \geq 0.$$

$$y_3 = y_3^+ - y_3^- \quad \text{với } y_3^+ \geq 0, y_3^- \geq 0.$$

Quan hệ giữa các biến như sau:

$$y_j^+ = \begin{cases} y_j & \text{nếu } y_j \geq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}; \quad y_j^- = \begin{cases} y_j & \text{nếu } y_j \leq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$



Nếu bài toán ban đầu có thêm ràng buộc khác nữa, chẳng hạn lượng tài nguyên sử dụng không được vượt quá mức hiện có, thì có thể đưa ra ràng buộc đó vào mô hình này.

Dùng phương pháp đơn hình giải bài toán trên, ta nhận được phương án tối ưu sau :

$$x_1 = \frac{25}{3}; x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{3},$$

với

$$y_1^+ = 0, y_1^- = 0, y_2^+ = \frac{25}{3}, y_2^- = 0, y_3^- = 0$$

. Như vậy,  $y_1 = 0, y_2 = \frac{25}{3}, y_3 = 0$  nghĩa là mục tiêu thứ nhất và thứ ba hoàn toàn được thỏa mãn, song lượng lao động vượt quá mức quy định là 8 (833 người).  
Lượng phạt do vi phạm trên về lao động là :  $Z = 16$ .

# Qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên

Sau đây sẽ xét trường hợp các mục tiêu có mức ưu tiên khác nhau. Tình huống này xảy ra khi có một hay một số mục tiêu rõ ràng có tầm quan trọng hơn các mục tiêu khác. Vì thế, sự tập trung trước hết vào việc đạt được các mục tiêu này đến mức tối đa có thể. Các mục tiêu còn lại cũng có thể phân chia tiếp thành các mục tiêu ưu tiên cấp 2, cấp 3, vv.... Sau khi nhận được lời giải đối với các mục tiêu có mức ưu tiên cấp 1, ta xét đến cấp 2, rồi ưu tiên cấp 3....

Khi xét các mục tiêu cùng cấp ưu tiên cách làm cũng giống như đã mô ta trên (một hay hai phía). Nếu cần vẫn có thể đưa vào các hệ số phạt khác nhau đối với các độ lệch khỏi mục tiêu đã quy định. Kỹ thuật biến phụ lại được sử dụng để đưa bài toán nhiều mục tiêu về dạng bài toán qui hoạch tuyến tính.

Có hai phương pháp chính để xử lý các bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên.

**Phương pháp 1:** Phương pháp tuần tự.

**Phương pháp 2:** Phương pháp trực tiếp.