ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CNTT & TT

----------🙘📖🙚---------

BÙI THỊ THU TRANG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH NGHIỆM GẦN ĐÚNG ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC CẤP HAI TRONG MIỀN PHỨC TẠP HOẶC ĐIỀU KIỆN BIÊN PHỨC TẠP

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC MÁY TÍNH

Chuyên ngành : Khoa học máy tính
Mã số : 60 48 01

Thái Nguyên, năm 2011

MỤC LỤC

DANH MỤC BẢNG

DANH MỤC HÌNH

MỞ ĐẦU

Một số mô hình trong vật lý và cơ học đều đưa đến việc xác định nghiệm của bài toán biên elliptic cấp hai với các điều kiện biên khác nhau. Trong những trường hợp đơn giản khi miền hình học là miền hình chữ nhật và có điều kiện biên hỗn hợp yếu (tức là trên một cạnh chỉ có 1 loại điều kiện biên Dirichlet hoặc Neumann) thì bằng việc sử dụng các phương pháp sai phân, bài toán vi phân được đưa về hệ phương trình véc tơ ba điểm và xác định nghiệm gần đúng qua việc giải các hệ phương trình đại số tuyền tính bằng các thuật toán đã biết. Tuy nhiên trong miền hình học không phải là miền hình chữ nhật hoặc điều kiện biên là hỗn hợp mạnh (tức là trên một cạnh có hai loại điều kiện biên Dirichlet và Neumann) thì bài toán xuất hiện điểm kì dị tại các góc của miền hoặc điểm phân chia giữa hai loại điều kiện biên khi đó phương pháp sai phân sẽ gặp khó khăn. Để giải quyết các dạng bài toán trên, chúng ta có thể sử dụng phương pháp chia miền tìm nghiệm xấp xỉ bằng tổng hữu hạn các hàm cơ sở xung quanh điểm kì dị. Như vậy, việc tìm hiểu, nghiên cứu các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ của các bài toán biên elliptic cấp hai trong trường hợp miền phức tạp hoặc điều kiện biên phức tạp cũng như so sánh giữa các phương pháp và lập trình tính toán thử nghiệm trên môi trường Matlab là có ý nghĩa khoa học.

Nội dung chính của luận văn là tiến hành tìm hiểu, nghiên cứu cơ sở lý thuyết các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán biên elliptic cấp hai trong miền hình học phức tạp hoặc điều kiện biên phức tạp, đặc biệt là phương pháp xác định nghiệm xấp xỉ thông qua các hệ hàm cơ sở xung quanh các điểm kì dị, so sánh với phương pháp chia miền và lập trình tính toán thử nghiệm trên nền ngôn ngữ Matlab. Cấu trúc của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Đưa ra một số kiến thức cơ bản về phương pháp sai phân, thuật toán thu gọn giải hệ phương trình véc tơ ba điểm, các hệ thống thư viện chương trình mẫu và lý thuyết về các sơ đồ lặp.

Chương 2: Trình bày cơ sở lý thuyết về phương pháp xấp xỉ biên đối với bài toán có điều kiện biên kì dị trong 2 trường hợp, trường hợp miền hình học phức tạp và trường hợp điều kiện biên hỗn hợp mạnh. Kết quả áp dụng với bài toán Motz.

Chương 3: Đưa ra cơ sở các phương pháp chia miền giải bài toán biên với biên kì dị, so sánh các phương pháp xấp xỉ biên với phương pháp chia miền đối với bài toán Motz.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS Vũ Vinh Quang, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành của mình đối với thầy. Em xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông - Đại học Thái Nguyên, Viện Công nghệ thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tham gia giảng dạy, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập. Tuy nhiên vì điều kiện thời gian và khả năng có hạn nên luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Em kính mong các thầy cô giáo và các bạn đóng góp ý kiến để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ GIẢI SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong chương này, luận văn trình bày một số kiến thức liên quan đến việc giải số phương trình đạo hàm riêng bao gồm: Cơ sở về phương pháp lưới, phương pháp lặp, thuật toán thu gọn khối lượng tính toán, giới thiệu các thư viện chương trình TK2004 và RC2009 tìm nghiệm số của các bài toán biên hỗn hợp trong miền chữ nhật. Những kiến thức cơ sở và kết quả được tham khảo từ các tài liệu [3,4,8,10].

1.1. Phương pháp sai phân.

1.1.1. Lưới sai phân.

Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $\Omega = \{(x,y) \in R^2, a \le x \le b, c \le y \le d\}$, chọn 2 số nguyên $N > 1$ và $M > 1$, đặt $h = (b-a)/N$ gọi là bước lưới theo *x*, $k = (d-c)/M$ gọi là bước lưới theo *y*. Đặt $x_i = a + ih$, $y_j = c + jk$, $i = 0...N$, $j = 0...M$. Mỗi điểm (x_i, y_j) gọi là một nút lưới ký hiệu là nút (i, j). Tập tất cả các nút trong miền ký hiệu là Ω_{hk}. Nút ở trên biên $\partial\Omega$ gọi là nút biên; tập tất cả các nút biên ký hiệu là Γ_{hk}, tập $\overline{\Omega}_{hk} = \Omega_{hk} \cup \Gamma_{hk}$ gọi là một lưới sai phân trên $\overline{\Omega}$.

1.1.2. Hàm lưới.

Mỗi hàm số xác định tại các nút của lưới gọi là một hàm lưới, giá trị của hàm lưới $u(x,y)$ tại nút lưới (i,j) viết tắt là $u_{i,j}$, $i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M}$. Mỗi hàm $u(i,j)$ xác định tại mọi $(x,y) \in \overline{\Omega}$ tạo ra hàm lưới u xác định bởi $u_{i,j}$.

1.1.3. Bài toán sai phân.

Ký hiệu $C^m(\overline{\Omega})$ là không gian các hàm số hai biến (x, y) có các đạo hàm riêng đến cấp m liên tục trong $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Giả sử bài toán có nghiệm $u \in C^4(\overline{\Omega})$, khi đó:

$$max_{(x,y)\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,y)\right| \le C_1 = const,\ max_{(x,y)\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y}(x,y)\right| \le C_2 = const.$$

Do đó theo công thức Taylor ta có:

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i + h,\ y_j) = u(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \delta(h^4)$$

hay
$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta(h^2)$$

Một cách tương tự:

$$u(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_j + k) = u(x_i, y_j) + k\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \delta(k^4)$$

$$u(x_i, y_{j-1}) = u(x_i, y_j - k) = u(x_i, y_j) - k\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \delta(k^4)$$

Do đó:

$$\frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta(k^2)$$

Vậy ta có:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} +$$

$$+\frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} = \Delta u + \delta(h^2 + k^2)$$

Ta đặt:

$$\Delta_{hk} u \equiv \frac{u_{i+1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

Khi đó chứng tỏ:

$$\Delta_{kh} u = \Delta u + \delta(h^2 + k^2)$$

Số hạng $\delta(h^2+k^2)$ là một số vô cùng bé bậc hai. Ta nói toán tử Δ_{kh} xấp xỉ toán tử Δ, điều đó cho phép thay phương trình vi phân bằng phương trình sai phân:

$$\Delta_{hk}u = f_{ij}, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_{hk}$$

tức là:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_{hk} \tag{1.2}$$

đồng thời thay điều kiện biên bằng điều kiện:

$$u_{ij} = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_{hk} \tag{1.3}$$

Ta được bài toán sai phân hoàn chỉnh: Tìm hàm lưới u tại các nút (i, j) thỏa mãn hệ phương trình sai phân (1.2) với các điều kiện biên (1.3). Như vậy việc tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán vi phân (1.1) với độ chính xác cấp hai được đưa về việc giải bài toán sai phân (1.2) với điều kiện (1.3) bằng các phương pháp đại số.

1.2. Thuật toán thu gọn khối lượng tính toán

Phương pháp này được đề xuất bởi Samarskij-Nicolaev. Bằng các phép biến đổi đơn giản về véc tơ và ma trận, các bài toán sai phân luôn luôn được đưa về hệ phương trình véc tơ ba điểm thuộc một trong các dạng sau đây:

1.2.1. Bài toán biên thứ nhất

Xét bài toán biên thứ nhất đối với phương trình véc tơ ba điểm

$$-Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} = F_j \ , \ 1 \le j \le N-1, \ Y_0 = F_0 \, , \ Y_N = F_N \, . \tag{1.4}$$

Trong đó Y_j là véc tơ cần tìm, C là ma trận vuông, F_j là véc tơ cho trước. Ý tưởng của phương pháp rút gọn hoàn toàn giải (1.1) là khử liên tiếp các ẩn Y_j đầu tiên với các j lẻ, sau đó từ các phương trình còn lại khử các Y_j với j là bội của 2, rồi bội của 4, … Mỗi bước khử sẽ giảm được một nửa số ẩn. Như vậy nếu $N = 2^n$ thì sau một số lần khử sẽ còn lại một phương trình chứa véc tơ ẩn $Y_{N/2}$ mà từ đó $Y_{N/2}$ có thể tính được qua Y_0 và Y_N . Sau khi đã có được $Y_0, Y_{N/2}$ và Y_N thì quá trình ngược lại là việc tìm các Y_j với j là bội của $\frac{N}{4}$ rồi bội của $\frac{N}{8}$,… rõ ràng, phương pháp